

Inclusión y atención a la diversidad

- Lo fundamental de la unidad

Esquema incompleto de los contenidos de la unidad

- Fichas de trabajo A

- Fichas de trabajo B

- Soluciones de las fichas de trabajo



www.anayaeducacion.es

En la web dispone de ejercicios con los que reforzar y ampliar los contenidos.

NÚMEROS ENTEROS Y RACIONALES

NÚMEROS ENTEROS, $\mathbb{Z}$

- Los números naturales, junto con los correspondientes negativos y el cero, forman el conjunto $\mathbb{Z}$ de los **números**
- El **valor absoluto** de un número entero es

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

- Al **suprimir un paréntesis** precedido del signo menos, los signos interiores

$$-(+8) = -8 \quad -(-13) = +13$$

- Sumas y restas**

$$(-2) - (+5) - (-8) - (-2 + 9) = -2 - 5 + 8 + 2 - 9 = 10 - 16 = -6$$

- Regla de los signos**

$$+ \cdot + = + \quad + \cdot - = - \quad - \cdot + = - \quad - \cdot - = +$$

$$+ : + = + \quad + : - = - \quad - : + = - \quad - : - = +$$

$$\textcircled{1} (11 - 15) - (-9) + (-16) - (-12 - 8) = \dots$$

- Operaciones combinadas**

$$(-3) \cdot 4 - (+15) : [11 - (6 - 8) \cdot (-3)] =$$

$$= (-12) - (+15) : [11 - (-2) \cdot (-3)] =$$

$$= (-12) - (+15) : [11 - (+6)] =$$

$$= (-12) - (+15) : [11 - 6] =$$

$$= (-12) - (+15) : [+5] =$$

$$= (-12) - (+3) =$$

$$= -12 - 3 = -15$$

$$\textcircled{2} (7 - 13) \cdot (-3) + (-20) : [13 + 3 \cdot (-6)] = \dots$$

NÚMEROS RACIONALES, $\mathbb{Q}$

- Los **números racionales** son los que se pueden poner en forma de
- Simplificar** una fracción es dividir el numerador y el denominador por un
- Si una fracción no se puede se dice que es **irreducible**.
- Dos fracciones son **equivalentes** si

OPERACIONES CON FRACCIONES

- Para **sumar y restar** fracciones, se reducen primero a común denominador.

$$\frac{7}{12} + \frac{11}{15} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} + \frac{11 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{35}{60} + \frac{44}{60} = \frac{79}{60}$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{3} - \frac{7}{10} + \frac{4}{15} = \dots$$

- Potencias de exponente nulo o negativo**

Para $a \neq 0$:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\textcircled{5} a) \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \dots$$

$$b) \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \dots$$

$$c) 2^6 \cdot 5^6 = \dots$$

$$d) \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \dots$$

$$e) \left(\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \dots$$

- Producto y cociente**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{6} : \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\right) = \dots$$

- Propiedades de las potencias**

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

PRACTICA**1. Calcula.**

a) $8 \cdot [6 + (-2)] - [-3 + 5 - (7 - 10)]$

b) $[3 \cdot (-2)] - 5 \cdot [(-8) : (-2) + (-6)]$

c) $(-20) : [8 - 4 \cdot (-3)] + (-2) \cdot [1 - (-3)]$

2. Reduce cada fracción a otra equivalente, de forma que todas tengan el mismo denominador. Después, ordénalas de menor a mayor.

a) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{12}, \frac{3}{10}$

b) $\frac{8}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$

3. Calcula.

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{7}{18}$

b) $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{10} - \frac{1}{15}$

4. ¿Cuántos capicúas hay en los números de tres cifras entre el 100 y el 999?**5. ¿Cuántos menús diferentes puedo elegir en un restaurante entre cuatro primeros platos (A, B, C, D), tres segundos (a, b, c) y cinco postres (m, n, o, p, q)? ¿Cuántos de ellos tienen A de primero y p o q de segundo?****6. Aplica propiedades de las potencias y reduce a una sola potencia.**

a) $\frac{2^6 \cdot 2^{-3}}{2^4}$

b) $\frac{(3^4)^{-3} \cdot 3^2}{3^2 : 3^{-4}}$

c) $\frac{(4^5)^2 \cdot 4^3}{4^{-2} : (4^{-3})^2}$

APLICA. LA FINCA DEL ABUELO

Los padres de Carmen acaban de heredar una finca, distribuida del siguiente modo: $\frac{2}{3}$ se utilizan para encinares; $\frac{2}{3}$ del resto está sembrado de cereal; en la mitad del resto se cultivan tomates, y lo que queda son pastizales para el ganado vacuno. Carmen ayuda a sus padres para ver en qué situación real está la finca.

E	E	C	
		C	
		T	P

E - ENCINAR
C - CEREAL
T - TOMATES
P - PASTOS

1. ¿Qué parte de la finca ocupa el cereal? ¿Y la huerta de tomates?
2. Sabiendo que la huerta de los tomates ocupa una superficie de 5 hectáreas, ¿cuál es la superficie total de la finca?
3. Cuando hablan de los tomates con los vecinos, les dicen que cada hectárea produce 10 toneladas. Por cada kilogramo de tomate puesto en el mercado, pueden conseguir entre medio euro y cuatro quintos de euro. ¿Qué ingresos pueden conseguir por la venta de los tomates?
4. Un ganadero del pueblo les asegura que media hectárea de pasto da para alimentar a 3 vacas durante un año. Los padres de Carmen se preguntan cuántas vacas pueden mantener al año. ¿Puedes ayudarles?
5. También piensan criar cerdos con las bellotas de las encinas. Saben que en cada hectárea hay 100 encinas y que cada encina produce 30 kg de bellotas al año. Además, un vecino del pueblo les dice que cada cerdo consume 10 kg de bellotas al día. Ayuda a Carmen a calcular el número de cerdos que pueden mantener al año.
6. Unos amigos de los padres de Carmen les dicen que por cada hectárea pueden conseguir 20 toneladas de cereal. En la gestoría han averiguado que pueden vender el cereal a un precio medio de treinta céntimos de euro por kilo y conseguir una subvención equivalente a dos terceras partes del precio de mercado. ¿Cuánto obtendrían por la cosecha de cereal?

PRACTICA**1. Calcula.**

- a) $[6 + (-8)] - [(-3) + 2 \cdot (-1) - (-3) \cdot (5 - 7)]$
 b) $[(-5) \cdot (-2) - (+11)] - (-5) \cdot [(13 - 15) : (-2) + (-7 + 3)]$
 c) $[13 - (-2) \cdot (-5)] : (1 - 4) - [2 \cdot (-6) \cdot (+3) - (-7) \cdot 4] : (-4)$

2. a) ¿Qué fracción de hora son 20 minutos?

b) ¿Y 35 minutos?

c) ¿Y 75 minutos?

3. Representa, usando un procedimiento geométrico, los siguientes racionales en la recta real:

$$\frac{2}{5}, \frac{7}{6} \text{ y } -\frac{3}{4}$$

4. Calcula.

a) $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)$

b) $\frac{5}{2} - \left[1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] \cdot \frac{2}{3}$

5. Aplica las propiedades de las potencias y reduce el resultado a una sola potencia.

a) $\frac{a^2 \cdot (b \cdot c)^2}{(a^3)^2 \cdot b^4 \cdot (c^2)^3}$

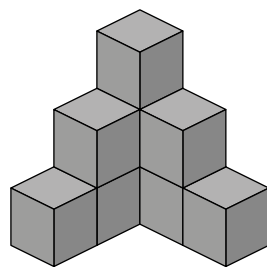
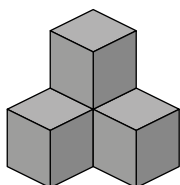
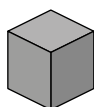
b) $\frac{(m^4 : m^2)^{-3}}{(m^{-2})^3}$

c) $\frac{(n^4 \cdot n^2)^2}{(n^3 : n^{-2})^3}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{4}\right)^2$

e) $\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27}\right)^4$

f) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4$

6. ¿Cuántos cubos cuentas en cada estructura? Encuentra una pauta y saca conclusiones. ¿Cuántos cubos tendrá una estructura de 10 pisos?

APLICA. FABRICACIÓN DE ACEITE DE OLIVA

La primera excursión de este año la hacéis a una cooperativa olivarera. Allí os explican todo el proceso de elaboración del aceite y sus derivados. Sin embargo, el guía os pone en algunos aprietos, porque, en lugar de daros toda la información, os pide que la obtengáis vosotros.

1. Al prensar las aceitunas en la almazara, se separa el agua, que supone el 45 % del peso total, el aceite, que supone las tres décimas partes y el orujo, que es el residuo sólido.

- a) ¿Qué fracción del peso de las aceitunas queda en forma de orujo?
- b) ¿Qué tanto por ciento es?

2. ¿Cuántos gramos de agua, aceite y orujo contiene cada kilo de oliva?

3. El hueso de la aceituna, que se aparta para utilizarlo como biomasa, supone las tres quintas partes del orujo.

- a) ¿Qué fracción del peso de las aceitunas corresponde al hueso?
- b) ¿Qué tanto por ciento es?
- c) ¿Cuántos kilos de biomasa se obtiene de cada tonelada de aceituna?

4. Un agricultor entregó la semana pasada su cosecha de oliva de la que salieron 2 400 kilos de orujo. ¿Cuántos kilos de aceitunas entregó en la almazara?

5. Del aceite obtenido, una quinta parte es de la categoría "oliva extra" (calidad superior), y el 75 % del resto es de calidad normal. Todo lo que queda es de calidad inferior, para uso industrial.

Ayer se obtuvieron 26 000 litros de aceite para uso industrial.

¿Cuántos litros se obtuvieron de aceite de oliva, tanto de calidad extra como normal?

6. Un agricultor ha traído hoy a la cooperativa una carga de 18 000 kg de aceitunas.

Si la densidad del aceite es de 0,91 gramos por centímetro cúbico, ¿cuántos litros de aceite obtendrá de su cosecha?

Unidad 1

Ficha de trabajo A

PRACTICA

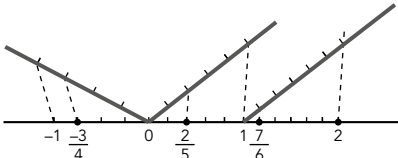
- a) 27 b) 4 c) -9
- a) $\frac{40}{60}, \frac{50}{60}, \frac{5}{60}, \frac{18}{60}$
 $\frac{1}{12} < \frac{3}{10} < \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$
 b) $\frac{32}{20}, \frac{6}{20}, \frac{5}{20}, \frac{30}{20}$
 $\frac{1}{4} < \frac{3}{10} < \frac{3}{2} < \frac{8}{5}$
- a) $\frac{7}{36}$ b) $\frac{31}{210}$
- 90 capicúas.
- $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ menús. Con A de primero y p o q de postre habrá $3 \cdot 2 = 6$ menús.
- a) 2^{-1} b) 3^{-16} c) 4^9

APLICA

- El cereal ocupa $\frac{2}{9}$ de la finca, y la huerta de tomates, $\frac{1}{18}$.
- La superficie total de la finca es de 90 hectáreas.
- Con los tomates pueden conseguir unos ingresos comprendidos entre 25 000 € y 40 000 €.
- Los pastizales pueden mantener 30 vacas durante un año.
- Tienen 60 ha de encinar. Pueden mantener unos 50 cerdos (el resultado es 49,32).
- Por cada kilo de cereal pueden obtener 50 céntimos de euro (30 céntimos por la venta y 20 céntimos de subvención). Y pueden producir 400 t al año, lo que proporcionará unos ingresos de 200 000 €.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

- a) 9 b) -16 c) -3
- a) $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ b) $\frac{35}{60} = \frac{7}{12}$ c) $\frac{75}{60} = \frac{5}{4}$
- 
- a) -1 b) $\frac{22}{9}$
- a) $a^{-4}b^{-2}c^{-4}$ b) 1 c) n^{-3}
 d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ e) $\frac{1}{3^{16}}$ f) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$
- 1 cubo - 4 cubos - 9 cubos
 Para 10 pisos, habrá $10^2 = 100$ cubos.

APLICA

- a) $\frac{1}{4}$ del peso de las aceitunas es orujo.
 b) Es un 25%.
- Cada kilo de oliva contiene 450 gramos de agua, 300 gramos de aceite y 250 gramos de orujo.
- a) $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{4} = \frac{3}{20}$
 b) $\frac{3}{20} = \frac{15}{100} \rightarrow 15\%$
 c) Se obtienen 150 kg.
- Entregó 16 000 kg de aceitunas.
- Se obtuvieron 104 800 litros.
- Obtendrá 5 934 litros.

LOS NÚMEROS DECIMALES

TIPOS DE DECIMALES

• Exactos

$$\frac{7}{4} = 7 : 4 = 1,75$$

• Periódicos

$$\text{Puro} \rightarrow \frac{17}{11} = 17 : 11 = 1,5\overline{4}$$

$$\text{Mixto} \rightarrow \frac{23}{18} = 23 : 18 = 1,2\overline{7}$$

• No exactos y no periódicos
(infinitas cifras no periódicas)

$$\sqrt{3} = 1,7320508...$$

PASO DE DECIMAL PERIÓDICO A FRACCIÓN

• De periódico puro a fracción.

$$A = 1,5\overline{4}$$

$$\left. \begin{array}{r} 100A = 154,545454... \\ - A = 1,545454... \\ \hline 99A = 153,000000... \end{array} \right\} A = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

• De periódico mixto a fracción.

$$B = 1,2\overline{7}$$

$$\left. \begin{array}{r} 100B = 127,7777... \\ - 10B = 12,7777... \\ \hline 90B = 115,0000... \end{array} \right\} B = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

① Pasa a forma fraccionaria: a) 0,18

b) $0,1\overline{8}$ c) $0,1\overline{8}$

APROXIMACIONES Y ERRORES

- Se llaman **cifras significativas** las que se usan para

$$16\,285\,290 \xrightarrow[\text{SIGNIFICATIVAS}]{\text{TRES CIFRAS}} 16\,300\,000$$

- **Error absoluto** es la diferencia, en valor absoluto, entre

El error cometido en el redondeo es menor que 5 unidades del orden

$$\text{Error absoluto} < 50\,000$$

- **Error relativo** es el cociente entre el error absoluto y el

$$\text{Error relativo} < \frac{50\,000}{16\,285\,290}$$

② Considera el número $1,6\overline{}$.a) Redondeo a las centésimas $\rightarrow$

b) Error absoluto < c) Error relativo <

NOTACIÓN CIENTÍFICA

- Un número en notación científica consta de dos factores:

— Un número decimal mayor o igual que 1 y menor que 10.

— Una potencia

$$6\,280\,000\,000 = 6,28 \cdot \dots\dots\dots$$

$$0,0000000217 = \dots\dots\dots \cdot 10^{-8}$$

③ $6\,280\,000\,000 = 6,28 \cdot \dots\dots\dots$

$$0,0000000217 = \dots\dots\dots \cdot 10^{-8}$$

$$\dots\dots\dots = 1,36 \cdot 10^{11}$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots \cdot 10^{-10}$$

PRACTICA

1. Obtén el número decimal en cada caso y clasifícalo.

a) $8 : 11$

b) $\frac{11}{8}$

c) $\sqrt{11}$

d) $\frac{5}{32}$

e) $4 : 30$

2. Ordena de menor a mayor.

$14,3$

$14,2\overline{3}$

$14,23$

$14,\overline{3}$

$14,\overline{23}$

$14,\overline{32}$

3. Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales periódicos:

a) $1,6$

b) $1,\overline{6}$

c) $1,1\overline{6}$

d) $0,1\overline{6}$

4. Si tomo como medida 3,45 cm en vez de 3,448 cm, ¿qué error absoluto cometo? ¿Cuál es el error relativo?

5. En una determinada muestra de sangre, la cantidad de glóbulos rojos de un paciente es de 4876389 unidades.

a) Considerando que las cifras de la derecha pueden variar según factores circunstanciales, despréciaslas redondeando la cantidad a las decenas de millar.

b) Escribe una cota del error absoluto cometido en el redondeo.

c) Escribe una cota del error relativo.

6. Completa la tabla.

NÚMERO	NÚMERO EN NOTACIÓN CIENTÍFICA
365 000 000 000	
	$1,8 \cdot 10^{13}$
0,0000000245	
	$9,4 \cdot 10^{-12}$

APLICA. EL CORTADOR DE CÉSPED

En tu barrio hay un jardinero que es un auténtico científico. Si no lo crees, fíjate en lo que es capaz de pensar sobre una tarea tan simple como cortar el césped. "Mira, en este jardín el césped crece a una velocidad de $2,5 \cdot 10^{-1}$ cm por día. Cuando lo corto, le dejo una altura media de 1,5 cm", te dice el jardinero.

1. "¿Observas lo bien cortado que está el césped? Pues no siempre está así. Tiendo a tener épocas de contemplación y me olvido de cortarlo. Eso sí, jamás debe pasar de 3 cm de altura. ¿A que no sabes cada cuántos días tengo que cortarlo para que la altura no supere esos 3 cm?"
2. "Vamos a ver. El césped lo riego cada 4 días. Recuerdo que el 1 de mayo, a pesar de ser festivo, lo regué y lo corté. ¿En qué otros días de mayo tuve que hacer ambos trabajos?"
3. "Cada vez que siego el césped tardo 3 h 15 min, y cada vez que riego me ocupa 1 hora y media. A ver si eres capaz de calcular cuántas horas trabajé en mayo, regando y segando".
4. "Oye, ¿y cuánto cobraste ese mes de mayo?", le preguntas. "Bien, veamos... Por cada día que tengo que venir me pagan 12,50 € por desplazamiento y, además, 20 € la hora de trabajo. Haz los cálculos tú mismo".

Nombre y apellidos:

Curso: Fecha:

PRACTICA

1. Opera y simplifica la expresión.

$$(2,\widehat{36} - 1,\widehat{3}) \cdot (0,\widehat{27} : 3,1)$$

2. Ordena estos números de menor a mayor:

0,5 $\widehat{32}$

0,532

0,53

0,5 $\widehat{32}$ 0,53 $\widehat{2}$ 0,3 $\widehat{52}$

3. Completa la tabla.

NÚMERO	NÚMERO EN NOTACIÓN CIENTÍFICA
45 billones	
	$3,744 \cdot 10^9$
134 cienmillonésimas	
	$1,06 \cdot 10^{-8}$

4. ¿Son ciertas estas desigualdades? Justifica la respuesta.

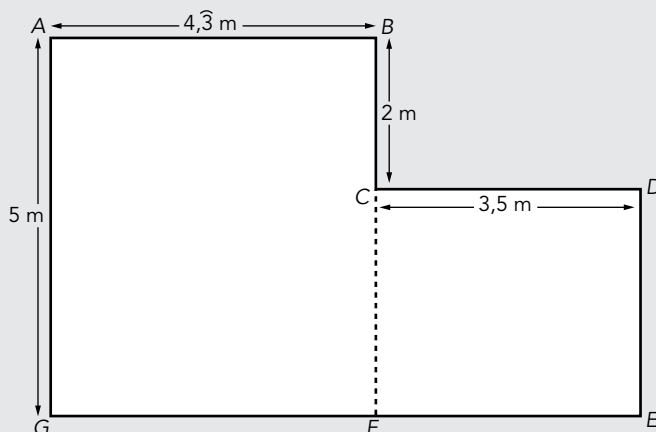
$$1,\widehat{49} < 1,4\widehat{9} < 1,5$$

5. Utilizando ciertos procedimientos indirectos para medir el peso de un grano de arroz, se ha obtenido el siguiente resultado: 0,0196065 gramos.

- Considerando que las cifras de la derecha pueden variar según factores circunstanciales, despréciaslas redondeando la cantidad a las milésimas de gramo.
- Escribe una cota del error absoluto cometido en el redondeo.
- Escribe una cota del error relativo.

APLICA. TRABAJOS EN LA PISCINA

Al lado de tu instituto hay una pequeña piscina que está en obras. Un día el profesor de matemáticas os lleva a verla y aprovecha para haceros muchas preguntas relativas a los trabajos de los operarios. El plano de la piscina es el siguiente:



1. En primer lugar, quieren vallar la piscina. En el almacén municipal hay rollos de alambre de 15 m, de 25 m y de 30 m. Por razones de presupuesto, solo quieren utilizar un rollo. El profesor quiere que le digáis qué rollo deben utilizar los obreros.
2. Luego quieren alicatar el fondo con baldosines esmaltados. Cada uno tiene una superficie de 400 cm^2 y se venden en cajas de 50 unidades, a 30 € la caja. "¿Cuántas cajas de baldosas necesitan y cuál será el coste?", os pregunta el profesor.
3. Tienen dividida la piscina en dos zonas: un rectángulo $ABFG$ y otro $CDEF$. Uno de los operarios os cuenta que van a acotar la zona más pequeña para dedicarla a los niños. Esta zona tiene una profundidad de 1 m y la zona para los adultos, 3 m. El profesor aprovecha y os pide que calculéis el volumen de agua necesario para llenarla, en litros.

Unidad 2

Ficha de trabajo A

PRACTICA

- $0,\widehat{72} \rightarrow$ decimal periódico puro
 - $1,375 \rightarrow$ decimal exacto
 - $3,31662... \rightarrow$ decimal no exacto y no periódico
 - $0,15625 \rightarrow$ decimal exacto
 - $0,1\widehat{3} \rightarrow$ decimal periódico mixto
- $14,23 < 14,\widehat{23} < 14,\widehat{2}\widehat{3} < 14,3 < 14,3\widehat{2} < 14,\widehat{3}$
- $\frac{8}{5}$
 - $\frac{5}{3}$
 - $\frac{7}{6}$
 - $\frac{16}{99}$
- Error absoluto = 0,002
Error relativo = $0,00058 = 5,8 \cdot 10^{-4}$
- 4 880 000
 - Error absoluto < 5 000
 - Error relativo < $\frac{5000}{4880000} < 0,0011$

NÚMERO	NÚMERO EN NOTACIÓN CIENTÍFICA
365 000 000 000	$3,65 \cdot 10^{11}$
18 000 000 000 000	$1,8 \cdot 10^{13}$
0,0000000245	$2,45 \cdot 10^{-8}$
0,0000000000094	$9,4 \cdot 10^{-12}$

APLICA

- Cada 6 días.
- Ambos trabajos se superponen cada 12 días. Volvió a regar y cortar el césped el 13 y el 25 de mayo.
- Durante el mes de mayo segó el césped 6 veces y lo regó 8 veces. Trabajó, en total, 31 horas y media.
- En mayo va a segar los días 1, 7, 13, 19, 25 y 31; y a regar, los días 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25 y 29.
Se desplazó, en total, 11 días, por lo que cobró 137,50 €.
Por el trabajo cobró 630 €.
Cobró, en total, 767,50 €.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

- $\left(\frac{213}{90} - \frac{12}{9}\right) \cdot \left(\frac{27}{99} : \frac{31}{10}\right) = \frac{1}{11}$
- $0,\widehat{352} < 0,53 < 0,532 < 0,5\widehat{3}2 < 0,5\widehat{3}2 < 0,\widehat{532}$
- | NÚMERO | NÚMERO EN NOTACIÓN CIENTÍFICA |
|----------------------|-------------------------------|
| 45 billones | $4,5 \cdot 10^{13}$ |
| 3 744 000 000 | $3,744 \cdot 10^9$ |
| 134 cienmillonésimas | $1,34 \cdot 10^{-6}$ |
| 0,0000000106 | $1,06 \cdot 10^{-8}$ |
- $1,\widehat{49} = 1,494949... < 1,4\widehat{9} = 1,49999...$
La primera desigualdad es cierta.
 $1,4\widehat{9} = \frac{3}{2} = 1,5 \rightarrow$ Los números $1,4\widehat{9}$ y 1,5 son iguales.
La segunda desigualdad es falsa.
- 0,020
 - Error absoluto < 0,0005
 - Error relativo < 0,025

APLICA

- El perímetro de la piscina es poco más de 25 m. Por tanto, deben usar un rollo de 30 m.
- Se necesitan 17 cajas de baldosas, que cuestan 510 euros.
- El volumen es 75 500 l.

Lo fundamental de la unidad

Nombre y apellidos:

Curso: Fecha:

NÚMEROS REALES

NÚMEROS RACIONALES

Son los que se pueden poner como

.....

EJEMPLOS:

$$2,5\overline{3} = \text{---}$$

NÚMEROS IRRACIONALES

La expresión decimal de un número irracional está formada por.....

.....

EJEMPLOS:

INTERVALOS Y SEMIRRECTAS

Nombre	Expresión	Números que comprende	Representación	Ejemplo
	(a, b)			
	$[a, b]$			
	$(a, b]$			
	$[a, b)$			
	$(-\infty, b)$			
	$(-\infty, b]$			
	$(a, +\infty)$			
	$[a, +\infty)$			

RAÍCES

• $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = \dots\dots\dots$

• Podemos expresar un radical en forma de potencia así: $\sqrt[n]{a} = \dots\dots\dots$ $\sqrt[n]{a^m} = \dots\dots\dots$

EJEMPLOS: $\sqrt[5]{a} = \dots\dots\dots$ $\sqrt[5]{3^2} = \dots\dots\dots$ $8^{1/3} = \dots\dots\dots$ $5^{3/4} = \dots\dots\dots$

PROPIEDADES DE LOS RADICALES

① $\sqrt[n^p]{a^p} =$

EJEMPLO: $\sqrt[6]{a^2} = \dots\dots\dots$

② $\sqrt[n]{a \cdot b} =$

EJEMPLO: $\sqrt[3]{8 \cdot 64} = \dots\dots\dots$

③ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} =$

EJEMPLO: $\sqrt[n]{\frac{256}{81}} = \dots\dots\dots$

④ $(\sqrt[n]{a})^p =$

EJEMPLO: $(\sqrt[6]{2})^8 = \dots\dots\dots$

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} =$

EJEMPLO: $\sqrt[3]{\sqrt[6]{64}} = \dots\dots\dots$

• **Racionalizar** denominadores consiste en

.....

PRACTICA

1. Escribe como intervalo los números que verifican las condiciones siguientes:

a) Comprendidos entre -3 y 2 , incluidos ambos.

b) $-3 \leq x < 2$

c) Mayores o iguales que -3 .

2. Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[3]{2^2}$

b) $(\sqrt[5]{3^2})^2$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{6}}$

3. Expresa como raíz y calcula.

a) $9^{1/2}$

b) $27^{1/3}$

c) $256^{1/4}$

4. Simplifica los radicales siguientes:

a) $\sqrt[5]{32^2}$

b) $\sqrt[6]{16}$

c) $\sqrt[8]{64}$

5. Saca factores de la raíz y simplifica:

a) $\frac{\sqrt{18}}{6}$

b) $\frac{\sqrt[3]{40}}{16}$

c) $\frac{\sqrt[4]{80}}{8}$

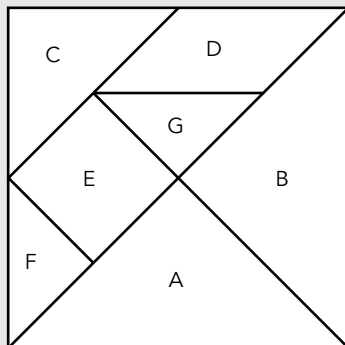
6. Suma los siguientes radicales:

a) $3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27}$

b) $2\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{18}$

APLICA. ACTIVIDADES CON TANGRAM

En clase de Luis, el profesor les ha presentado el TANGRAM, famoso y milenario rompecabezas chino de 7 piezas:



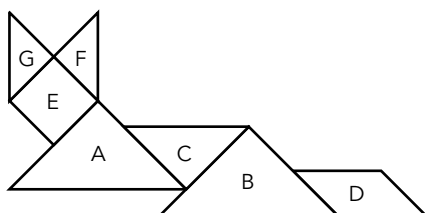
Antes de dejar que construyan figuras y siluetas con ellas, les plantea tres actividades:

1. "Si tomamos el lado del cuadrado E como unidad de medida, completad la siguiente tabla para las demás piezas":

PIEZA	EXPRESIÓN EXACTA (RADICAL) DE LA MEDIDA DE SUS LADOS	PERÍMETRO DE LA PIEZA
E	1, 1, 1, 1	
A (o B)		
C		
D		
F (o G)		

2. ¿Cuántas veces es mayor el perímetro de B que el de E?

3. Cada estudiante construye una figura elegida de un catálogo. El profesor pone como tarea calcular el perímetro de la figura elegida. Luis ha construido este gato. ¿Podrías ayudarlo a calcular su perímetro?



Nombre y apellidos:

Curso: Fecha:

PRACTICA**1.** Expresa como intervalo los siguientes conjuntos de puntos de la recta real:

a) $\{x/2 \leq x < 6\}$

b) $\{x/-\infty < x \leq 3\}$

c) $\{x/x \geq 2\}$

2. Expresa en forma exponencial.

a) $(\sqrt[3]{2^4})^2$

b) $(\sqrt[5]{3^2})^2$

c) $\sqrt{\sqrt{2^5}}$

3. Expresa como raíz y calcula.

a) $9^{1/2}$

b) $81^{1/4}$

c) $(36^2)^{1/4}$

d) $(25^4)^{1/8}$

4. Simplifica las expresiones siguientes. Expresa el resultado final en forma de potencia:

a) $\frac{\sqrt[5]{32^2} : \sqrt[6]{16}}{\sqrt{64}}$

b) $\frac{\sqrt[4]{25} : \sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}}$

5. Suma los siguientes radicales:

a) $2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} + \sqrt{98}$

b) $5\sqrt{75} + \sqrt{27} - 4\sqrt{108}$

6. Racionaliza y simplifica.

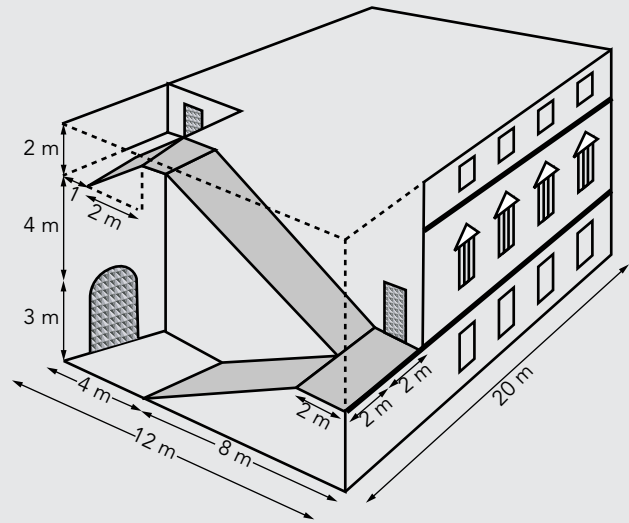
a) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$

b) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

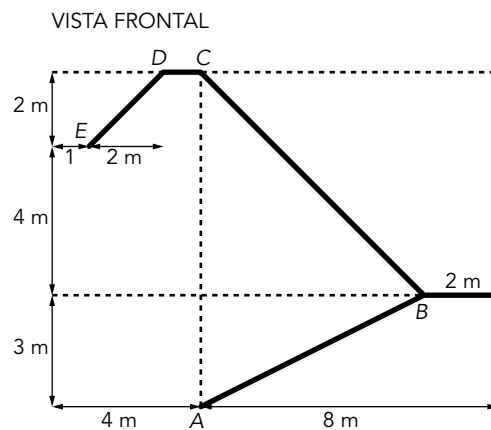
c) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ (Multiplica y divide por $1 + \sqrt{2}$)

APLICA. ARQUITECTURA DEL SIGLO XIX

En el Madrid de 1860, se construyeron casas de 3 plantas y ático (fueron las primeras con agua corriente), en el barrio proyectado por el marqués de Salamanca. Vamos a diseñar parte de una de esas casas tal como tuvieron que hacerlo entonces. Recuerda que ellos no tenían calculadora, así que no utilices la tuya. Nuestro objetivo es construir las escaleras, según el dibujo de la derecha:



1. ¿Qué longitud tendrán las rampas AB , BC y DE que representan las escaleras?



2. En el primer tramo de escalera, los escalones serán de 20 cm de altura y 40 cm de profundidad. En el segundo tramo, de 24 cm de altura y de profundidad, y en el tercero, de 25 cm de altura y de profundidad. Se cubrirán, atendiendo a sus tamaños, con losas de 40 cm $\times$ 2 m, 20 cm $\times$ 2 m, 24 cm $\times$ 2 m y 25 cm $\times$ 2 m. Los dos rellanos se cubrirán con losas de 1 m $\times$ 1 m. ¿Cuántas losas de cada tamaño serán necesarias?
3. ¿Cuál sería el precio total de las losas si en aquella época se vendían a 5 reales el metro cuadrado?

Unidad 3

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1. a) $[-3, 2]$ b) $[-3, 2)$ c) $[-3, +\infty)$
2. a) $2^{2/3}$ b) $3^{4/5}$ c) $6^{1/6}$
3. a) 3 b) 3 c) 4
4. a) 2^2 b) $3\sqrt{2^2}$ c) $4\sqrt{2^3}$
5. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$ c) $\frac{4\sqrt{5}}{4}$
6. a) $\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{2}$

APLICA

PIEZA	LADOS	PERÍMETRO
E	1, 1, 1, 1	4
A (o B)	2, 2, $2\sqrt{2}$	$4 + 2\sqrt{2}$
C	$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 2	$2 + 2\sqrt{2}$
D	1, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$	$2 + 2\sqrt{2}$
F (o G)	1, 1, $\sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$

2. $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ veces mayor.
3. $11 + 6\sqrt{2}$

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1. a) $[2, 6)$ b) $(-\infty, -3]$ c) $[2, +\infty)$
2. a) $2^{8/3}$ b) $3^{4/5}$ c) $2^{5/8}$
3. a) 3 b) 3
 c) 6 d) 5
4. a) $2^{-5/3}$ b) $5^{-1/3}$
5. a) $8\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{3}$
6. a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\sqrt{6}$ c) $-3 - 2\sqrt{2}$

APLICA

1. $\overline{AB} = 3\sqrt{5} \text{ m} \approx 6,71 \text{ m}$
 $\overline{BC} = 6\sqrt{2} \text{ m} \approx 8,5 \text{ m}$
 $\overline{DE} = \sqrt{5} \text{ m} \approx 2,24 \text{ m}$
2. Losas de $40 \text{ cm} \times 2 \text{ m} \rightarrow 15$
Losas de $20 \text{ cm} \times 2 \text{ m} \rightarrow 30$
Losas de $24 \text{ cm} \times 2 \text{ m} \rightarrow 50$
Losas de $25 \text{ cm} \times 2 \text{ m} \rightarrow 16$
Losas de $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \rightarrow 12$
3. Se obtienen 68 m^2 de losas. El coste sería de 340 reales.

PROBLEMAS ARITMÉTICOS

PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

• Regla de tres directa

En 2 minutos fabrica 30 piezas.

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{B} & \frac{B}{x} & \\ \text{En 3 minutos...} & 2 & 30 \\ & 3 & x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \frac{A}{B} & \frac{B}{x} & \\ \text{En 3 minutos...} & 2 & 30 \\ & 3 & x \end{array}} \right\} x = \frac{\dots\dots}{2}$$

• Regla de tres compuesta

Para llenar 2 camiones cisterna, en 8 horas, se necesita una toma de agua con un caudal de 5 litros por segundo.

Para llenar 3 camiones cisterna, en 10 horas, se necesita una toma de agua con un caudal de...

• Regla de tres inversa

A 60 km/h tarda 24 minutos.

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{B} & \frac{B}{x} & \\ \text{A 80 km/h tarda...} & 60 & 24 \\ & 80 & x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \frac{A}{B} & \frac{B}{x} & \\ \text{A 80 km/h tarda...} & 60 & 24 \\ & 80 & x \end{array}} \right\} x = \frac{\dots\dots}{80}$$

P. Directa

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{B} & \frac{B}{C} & \frac{C}{x} \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 10 & x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \frac{A}{B} & \frac{B}{C} & \frac{C}{x} \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 10 & x \end{array}} \right\} x = \frac{\dots\dots\dots}{2 \cdot 10}$$

P. Inversa

PORCENTAJES

• Cálculo de porcentajes

Total $\rightarrow T$ Tanto % $\rightarrow a\%$ Parte $\rightarrow P$

$$P = a\% \text{ de } T = T \cdot \frac{a}{100}$$

$$12\% \text{ de } 375 = 375 \cdot 0,12 = \dots\dots\dots$$

$$22\% \text{ de } 84 = \dots\dots\dots \cdot 0,22 = \dots\dots\dots$$

• Cálculo del %

El $a\%$ de 350 es 63. $a = ?$

$$350 \cdot \frac{a}{100} = 63 \rightarrow a = \dots\dots\dots$$

• Cálculo del total

El 15% de T es 33. $T = ?$

$$T \cdot 0,15 = 33 \rightarrow T = \dots\dots\dots$$

Aumentos y disminuciones porcentuales

• Índice de variación

Aumentar un 18% equivale a calcular el 118%.

$$\text{Índice de variación} \rightarrow I_v = 1,18$$

Disminuir un 18% equivale a calcular el 0,82%.

$$\text{Índice de variación} \rightarrow I_v = 0,82$$

• Cálculo de la cantidad final

350 aumentado un 18% se convierte en...

$$350 \cdot 1,18 = \dots\dots\dots$$

350 disminuido un 28% se convierte en...

$$350 \cdot 0,72 = \dots\dots\dots$$

• Cálculo de la cantidad inicial

Una cantidad aumentada un 18% se ha convertido en 413. La cantidad era 413 : 1,18 = ...

Una cantidad disminuida un 28% se ha convertido en 252. La cantidad era 252 : 0,72 = ...

• Cálculo del % aumentado o disminuido

240 aumentado un ... % se ha convertido en 252.

$$240 \cdot I_v = 252 \rightarrow I_v = \dots\dots\dots$$

350 disminuido un ... % se ha convertido en 294.

$$350 \cdot I_v = 294 \rightarrow I_v = \dots\dots\dots$$

DEPÓSITOS Y PRÉSTAMOS

• Interés simple

8500 €, colocados al 3% durante 7 meses, producen un interés de $I = \frac{8500 \cdot 3 \cdot 7}{1200} = \dots\dots\dots$

• Interés compuesto

15000 €, colocados al 3% durante 5 años, se convierten en $15000 \cdot 1,03^5 = \dots\dots\dots$

Nombre y apellidos:

Curso: Fecha:

PRACTICA

1. Un coche ha recorrido 32 kilómetros en 20 minutos. Si sigue a la misma velocidad, ¿qué distancia recorrerá en el próximo cuarto de hora?

2. Cinco obreros pintan un garaje en 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en hacerlo un obrero? ¿Y 10 obreros?

3. Cuatro camiones de una empresa de construcción mueven $1\,000\text{ m}^3$ de tierra en 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 6 camiones en mover $1\,200\text{ m}^3$ de tierra?

4. El 20% de una cantidad es 1 400 euros. ¿Cuál es esa cantidad?

5. Si compro un pantalón de 30 euros y un jersey de 50 euros en las rebajas del 20%, ¿cuánto pagaré finalmente?

6. ¿Cuál es el interés que produce un capital de 2 400 euros colocado al 10% anual durante 6 meses?

7. Mezclamos 6 kg de café A a 3 €/kg con 3 kg de café B a 2 €/kg. ¿Cuál es el precio final de la mezcla?

8. Tres amigos, A, B y C, han ganado 340 € repartiendo propaganda. A ha repartido cinco paquetes; B, dos paquetes; y C, 3 paquetes. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

APLICA. OBRAS EN LA CARRETERA

Una empresa dedicada a obras públicas recibe el encargo de hacer un desmonte para la rectificación de un tramo de carretera.

El gerente estima que, dedicando 15 camiones y trabajando en jornadas de ocho horas, tardarán 36 días en realizar la tarea.

1. Pero también estudia otras posibilidades...

a) ¿Cuántos días tardarían en realizar el trabajo empleando 20 camiones en jornadas de 8 horas?

b) ¿Cuántos días tardarían con 15 camiones, pero trabajando jornadas de 9 horas?

c) ¿Cuántos días tardarían con 20 camiones trabajando jornadas de 9 horas?

2. Pensando en el movimiento de tierras, el capataz dice que los 15 camiones, trabajando en jornadas de 8 horas, pueden transportar cada día 2400 m³ de áridos hasta la escombrera.

a) ¿Cuántos metros cúbicos transportarían cada día si se pusieran 20 camiones 8 horas diarias?

b) ¿Cuántos metros cúbicos transportarían cada día 15 camiones trabajando 9 horas cada día?

c) ¿Cuántos metros cúbicos transportarían 20 camiones, en 5 días, con jornadas de 9 horas?

3. Un camión tarda 30 minutos en llevar una carga hasta la escombrera, 10 minutos en volver, vacío, hasta el desmonte, y 20 minutos más en cargar de nuevo.

Si un camión A sale con una carga y en el mismo instante un camión B inicia el regreso, ¿cuánto tardan en cruzarse?

4. Se calcula que cada camión, en una jornada normal, realiza 8 viajes a la escombrera, 5 viajes por la mañana y 3 por la tarde, y retira en total 160 m³ de áridos. ¿Cuántos metros cúbicos retira por la mañana y cuántos por la tarde?

PRACTICA

1. Un camión, a una velocidad de 90 km/h, tarda 2h 45 minutos en hacer un recorrido. ¿Cuánto tardará un automóvil en hacer el mismo trayecto a una velocidad de 120 km/h?

2. El precio de la carne subió un 3% durante el primer semestre del año y luego un 2% durante el 2.º semestre. ¿Cuánto costará, al acabar el año, 1 kg de carne que costaba 10 euros el kilo al empezar el año?

3. ¿En qué cantidad se convertirá un capital de 1 000 euros colocado al 5% anual de interés compuesto, durante 2 años, si...
 - a) ...los intereses se abonan trimestralmente?

 - b) ...los intereses se abonan anualmente?

 - c) ...el capital se coloca a ese interés, pero simple durante el primer año y luego, en el segundo año, se coloca la cantidad total obtenida a interés compuesto del 7% anual, pero abonando los intereses al cabo de cada mes?

4. Una moto pasa por un pueblo a 90 km/h. Veinte minutos después, pasa un coche por el pueblo a 120 km por hora.
 - a) ¿Qué distancia ha recorrido la moto en ese periodo de tiempo?

 - b) ¿Cuánto tiempo tardará el coche en dar alcance a la moto?

 - c) ¿A qué distancia estarán del pueblo cuando esto ocurra?

APLICA. UNA DE BANCOS

Tus padres han ganado 6000 € en un sorteo de lotería y quieren colocarlos en un banco durante 2 años para obtener beneficios. Después de visitar varios bancos y recoger sus ofertas, te piden que les ayudes a elegir la mejor opción.

1. BANCO A: Les ofrecen una cartilla de ahorros al 5% de interés compuesto. Entonces tú preguntas: ¿el abono de intereses es anual, semestral o trimestral?

La mejor de las tres opciones —te contesta tu padre— pero dime tú cuál es. ¿Qué le contestas?

2. BANCO B: En este banco les ofrecen otra cartilla de ahorros al 6% de interés simple; es decir, los intereses producidos no se ingresan en la misma cartilla, con lo que el capital inicial es siempre el mismo. ¿Es más interesante esta oferta que la del BANCO A?

3. Una vez decidido un banco, tus padres vuelven al descartado para tratar de negociar una mejor oferta. El banco contraoferta ofreciéndoles un interés compuesto del 5,8% y abono de intereses trimestrales. ¿Deben aceptar tus padres la oferta?

4. Al cabo de los dos años, tus padres (que se decidieron por la mejor oferta) deciden gastar en ocio, a lo largo de un año, el dinero que hay en la cuenta. Destinarán una parte fija a cada mes, pero a diciembre le asignarán el triple (por la Navidad) y lo mismo a agosto (iréis a la playa). ¿Qué cantidad destinan a cada mes?

5. Tu tía Dolores, que es muy rara, opina que gastarse el dinero en ocio es una tontería, que es mejor abrir una cuenta para ti y otra para tu hermana, y repartir el dinero en partes inversamente proporcionales a vuestras edades.

Por curiosidad, ¿cuánto deberían haber puesto en cada cuenta si tus padres hubieran seguido los consejos de tía Lola, teniendo en cuenta que tú tienes 15 años y tu hermana, 10?

Unidad 4**Ficha de trabajo A****PRACTICA**

1. Recorrerá 24 km.
2. Un obrero tardará 30 horas y 10 obreros tardarán 3 horas.
3. Tardarán 4,8 horas = 4 h 48 min.
4. La cantidad es 7 000 euros.
5. Pagaré 64 euros.
6. Produce 120 euros.
7. El precio final es 2,67 euros/kg.
8. A, 170 €. B, 68 €. C, 102 €.

APLICA

1. a) 27 días.
b) 32 días.
c) 24 días.
2. a) 3 200 metros cúbicos.
b) 2 700 metros cúbicos.
c) 18 000 metros cúbicos.
3. Tardan 7,5 minutos (7 min 30 s) en cruzarse.
4. Retira 100 m^3 por la mañana y 60 m^3 por la tarde.

Ficha de trabajo B**PRACTICA**

1. 2 h 3 min 45 s
2. 10,51 euros
3. a) 1 104,49 euros
b) 1 102,50 euros
c) Después del primer año, la cantidad obtenida son 1 050 euros. Esta cantidad, después del 2.º año, se convierte en 1 125,90 euros.
4. a) 30 km
b) 1 hora
c) A 120 km del pueblo.

APLICA

1. Intereses con abono anual: 615 €
Intereses con abono semestral: 623 €
Intereses con abono trimestral: 627 €
Deberías recomendar el abono trimestral de intereses.
2. En el banco B conseguirían 720 € de beneficio.
Por tanto, es mejor que la oferta del banco A.
3. Con la contraoferta del banco A, conseguirían 732,36 €. Ahora sí que es mejor que el banco B.
4. Destinarán 1 262,32 € a diciembre, otro tanto a agosto y 420,77 € a cada uno de los meses restantes.
5. En tu cuenta deberían haber puesto 2 692,94 €, y en la de tu hermana, 4 039,42 €.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

MONOMIOS Y POLINOMIOS

- Un **monomio** es el producto indicado de un número (.....) por una o más letras (parte). El grado de un monomio es igual al número de factores que forman la parte literal.
- Un **polinomio** es la suma de dos o más El grado de un polinomio es

OPERACIONES CON POLINOMIOS

• Suma y resta

$$A(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x - 6$$

$$B(x) = x^3 - 4x + 5$$

$$A(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x - 6$$

$$+ B(x) = x^3 + 0x^2 - 4x + 5$$

.....

$$A(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x - 6$$

$$- B(x) = -x^3 - 0x^2 + 4x - 5$$

.....

• Multiplicación

$$(x^2 - 3x - 2) \cdot (2x - 1)$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x - 2 \\ \times \quad 2x - 1 \\ \hline -x^2 + 3x + 2 \\ 2x^3 - 6x^2 - 4x \\ \hline \end{array}$$

.....

• División

$$(2x^3 - 7x^2 - x + 2) : (2x - 1)$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 - x + 2 \quad | \quad 2x - 1 \\ \underline{-2x^3 + x^2} \quad x^2 - 3x - 2 \\ - 6x^2 - x \\ \underline{6x^2 - 3x} \quad - 4x + 2 \\ - 4x + 2 \\ \underline{4x - 2} \quad 0 \end{array}$$

• División entre $(x - a)$. Regla de Ruffini

$$(x^3 - 6x^2 + 5x + 2) : (x - 2) \rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 5 & 2 \\ 2 & & 2 & -8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & -3 & -4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{COCIENTE} = ... \\ \text{RESTO} = ... \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 2 = (.....) \cdot (x - 2) + (-4)$$

- Si la división $M(x) : (x - a)$ es exacta, entonces $M(a) = 0$, y se dice que **a es una raíz** del polinomio.

$$M(x) \quad | \quad x - a \quad M(x) = (x - a) \cdot C(x) \rightarrow M(a) = (a - a) \cdot C(a) = 0$$

$$\begin{array}{r} \dots \\ 0 \end{array} \quad C(x) \quad \text{Si } M(x) : (x - a) \text{ es exacta } \rightarrow M(a) = 0, \text{ y } a \text{ es una raíz del polinomio.}$$

$$M(x) = x^3 - x^2 - 2x - 12$$

$$(x^3 - x^2 - 2x - 12) : (x - 3) \rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -2 & -12 \\ 3 & & 3 & 6 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{DIVISIÓN EXACTA} \quad R = M(3) = 0 \\ 3 \text{ es raíz del polinomio } M(x). \\ \text{COCIENTE} = x^2 + 2x + 4 \end{array}$$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

• Con el factor común

$$2x^3 + 4x^2 - 2x = 2x \cdot (.....)$$

$$\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{2}x^3 \cdot (.....)$$

$$4x^3 - 36x^2 = ... \cdot (.....)$$

• Con los productos notables

$$4x^2 + 4x + 1 = (..... + 1)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x -)^2$$

$$16x^2 - 25 = (4x + ...) \cdot (4x - ...)$$

• Con las raíces del polinomio

Sabiendo que 3 es una raíz del polinomio $x^3 - x^2 - 2x - 12$:

$$x^3 - x^2 - 2x - 12 =$$

$$= (x - 3) \cdot (x^2 + 2x + 4)$$

PRACTICA

1. Reduce estas expresiones algebraicas:

a) $(2x^2 + 5x + 7) - (x^2 - 6x + 1)$

b) $7 - 2(x^2 + 3) - x(x - 3)$

c) $4 - \frac{3x}{2}(x^2 - 2) - \frac{x^2}{2}(x + 2)$

2. Calcula directamente el resultado de estas identidades notables:

a) $\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2$

b) $\left(\frac{x^2}{3} + 3x\right)^2$

c) $\left(\frac{x}{4} - 5\right)\left(\frac{x}{4} + 5\right)$

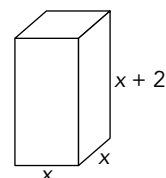
3. Transforma en forma de producto estas expresiones (saca factor común y luego usa las identidades notables):

a) $x^3 + 6x^2 + 9x$

b) $x^4 - 16x^2$

c) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2$

4. Expresa en función de x la superficie total y el volumen de esta figura.



5. Saca factor común.

a) $3x^2 - x$

b) $2x^4 - 6x^3 + 10x^2$

c) $10x^5 - 15x^4 + 5x^3$

6. Divide aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^3 - 5x^2 + 7x - 3) : (x + 1)$

b) $(x^3 - 5x^2 + 7x - 3) : (x - 3)$

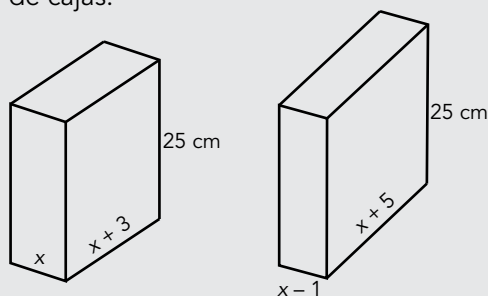
7. Teniendo en cuenta los resultados del ejercicio anterior...

a) Encuentra una raíz del polinomio $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

b) Descompón dicho polinomio en dos factores.

APLICA. CAJAS DE CEREALES

Un amigo de vuestra profesora de matemáticas le cuenta un problema que están teniendo en su empresa, para ver si podéis ayudarle. La empresa, que es de alimentación, ha decidido comercializar una marca de cereales y venderla en envases de cartón cuya altura no debe superar los 25 cm para facilitar su embalaje. Deben tomar la decisión entre dos tipos de cajas.



CAJA A: 3 cm más ancha que profunda.

CAJA B: 1 cm menos profunda, pero 2 cm más ancha, que la caja A.

1. Para poder elegir, lo primero que quieren saber es cuál de los dos modelos necesita menos superficie de cartón para fabricarlo. Ese modelo será el elegido. ¿Cuál es?
2. ¿Cuál es el volumen de cada uno de los dos modelos en función de la profundidad x ?
3. La profesora os cuenta que, a pesar de saber ya qué modelo van a utilizar, quieren seguir haciendo pruebas con distintos tamaños, y os pregunta: ¿Qué superficie de cartón se requerirá para el modelo de caja elegido si $x = 5$ cm?
4. Si la caja A tiene 5 cm de profundidad, ¿qué volumen, en centímetros cúbicos, puede envasarse en la caja A? ¿Y en la B?

PRACTICA

1. Reduce estas expresiones:

a) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}(x^2 + 1)$

b) $\frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x-2)}{4} - \frac{3(x-2)^2}{8}$

2. Transforma en producto (saca factor común y/o usa las expresiones notables):

a) $x^3 - x$

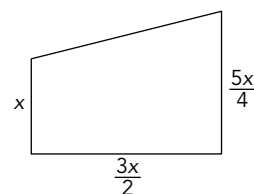
b) $4x^3 + 4x^2 + x$

c) $(x-1)(2x^2-9) - (x-1)(x^2+7)$

3. Reduce.

a) $\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+3}\right) \cdot x(x+3)$

b) $\left(\frac{3-x}{x} - \frac{3x+1}{x^2}\right) \cdot x^2$

4. Calcula la superficie de este polígono en función de x . ¿Cuál será el valor numérico de esa superficie si $x = 12$ m?

5. Divide.

a) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$

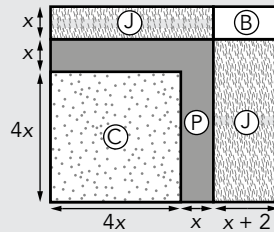
b) $(x^4 - 4x^3 + 8x - 1) : (x^2 - 3x - 1)$

6. Calcula las raíces del polinomio $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ y factorízalo.

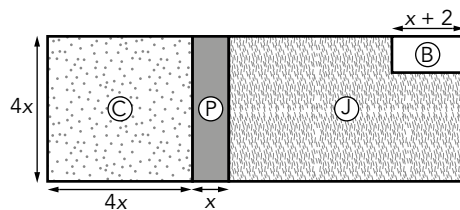
APLICA. PROYECTO DE CONSTRUCCIÓN

Un vecino tuyo está pensando en comprar una finca en el campo y construir una casa para los fines de semana. Como sabe que estás en 4.º de ESO, te pide que le ayudes con algunos cálculos que necesita.

Inicialmente, ha dibujado un boceto del proyecto, que consta de una casa unifamiliar (C), un paseo que la bordea (P), un pequeño bungalow (B) y un jardín (J). Y todo ello no debe superar los 650 metros cuadrados. El resto de la finca quedará salvaje.



- Atendiendo al boceto, escribe en función de x :
 - El perímetro que tendría la parcela urbanizada.
 - La superficie de la casa y la del bungalow.
 - La superficie del paseo y del jardín.
 - La superficie total.
- Tu vecino te dice que le gustaría que el paseo tuviera una anchura de 4 metros, pero que la superficie total del proyecto no debe superar los 650 m^2 . ¿Sería posible? ¿Qué le contestas?
- Tu vecino sigue dando vueltas a su proyecto y te presenta otro boceto diferente, reduciendo el paseo y aumentando el jardín. Pero dice que tiene que ocupar la misma superficie que el primero.



¿Qué dimensiones tendría ahora la parcela urbanizada? (El paseo seguirá teniendo 4 m de ancho.)

Unidad 5

Ficha de trabajo A

PRACTICA

- a) $x^2 + 11x + 6$ b) $-3x^3 + 3x + 1$
 c) $-2x^3 - x^2 + 3x + 4$
- a) $\frac{x^2}{4} - 2x + 4$ b) $\frac{x^4}{9} + 2x^3 + 9x^2$
 c) $\frac{x^2}{16} - 25$
- a) $x(x + 3)^2$ b) $x^2(x + 4)(x - 4)$
 c) $3x^2(x - 4)^2$
- a) $S = 6x^2 + 8x$ b) $V = x^2(x + 2)$
- a) $x \cdot (3x - 1)$ b) $2x^2 \cdot (x^2 - 3x + 5)$
 c) $5x^3 \cdot (2x^2 - 3x + 1)$
- a)

1	-5	7	-3
-1	-1	6	-13
1	-6	13	-16

 Cociente $\rightarrow x^2 - 6x + 13$
 Resto $\rightarrow -16$
- b)

1	-5	7	-3
3	3	-6	3
1	-2	1	0

 Cociente $\rightarrow x^2 - 2x + 1$
 Resto $\rightarrow 0$
- El valor $x = 3$ es raíz del polinomio.
 $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 1)$

APLICA

- Superficie de A: $2x^2 + 106x + 150$
 Superficie de B: $2x^2 + 108x + 190$
 El modelo A necesita menos superficie.
- $V_A = x(x + 3) \cdot 25 = 25x^2 + 75x$
 $V_B = (x - 1)(x + 5) \cdot 25 = 25x^2 + 100x - 125$
- La superficie es de 730 cm^2 .
- Se pueden envasar 1000 cm^3 en cada caja.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

- a) $\frac{2x^2}{3} - \frac{4}{9}$ b) $\frac{3x^2}{8} - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$
 c) $\frac{x^2}{6} - \frac{27x}{8} + \frac{113}{8}$
- a) $x(x^2 - x)$ b) $x(2x + 1)^2$
 c) $(x - 1)(x + 4)(x - 4)$
- a) 6 b) $-x^2 - 1$
- $\frac{27x^2}{16}$. Si $x = 12 \text{ m}$, la superficie son 243 m^2 .
- a) Cociente $\rightarrow x^2 - x - 6$ Resto $\rightarrow 0$
 b) Cociente $\rightarrow x^2 - x - 2$ Resto $\rightarrow x - 3$
- Las raíces son 1, -2 y 3.
 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$

APLICA

- a) $P_C = 24x + 4$
 b) $S_C = 16x^2$; $S_B = x^2 + 2x$
 c) $S_p = 9x^2$; $S_j = 10x^2 + 10x$
 d) $S_{\text{TOTAL}} = 36x^2 + 12x$
- Si $x = 4$, $S_{\text{TOTAL}} = 624 \text{ m}^2$.
 Sí es posible.
- Tendría $16 \text{ m} \times 39 \text{ m}$.

ECUACIONES

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

• Resolución

- Quitar **paréntesis**, si los hay.
- Quitar **denominadores**. Se multiplican los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- **Reducir** cada miembro.
- **Transponer** términos y **reducir**.
- **Despejar** la incógnita y hallar la solución.

$$3 \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3} \right) + x = 2 \cdot \left(3 - \frac{x}{6} \right) + \frac{3}{2}$$

.....

.....

.....

$$x = \frac{51}{17} \rightarrow x = 3$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

• Completas

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\textcircled{1} 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

• Incompletas

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x \cdot (ax + b) = 0$$

$$x = 0; \quad x = \frac{-b}{a}$$

$$\textcircled{2} 3x^2 - 2x = 0$$

$$x = \dots\dots\dots; \quad x = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$ax^2 + c = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$$\textcircled{3} 2x^2 - 50 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\dots\dots\dots}$$

OTROS TIPOS DE ECUACIONES

Con lo que ya sabes, puedes resolver otros muchos tipos de ecuaciones.

• Factorizadas

$$(x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (3x - 2) = 0$$

Las soluciones de la ecuación son los valores de x que anulan cada factor.

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = \dots\dots\dots$$

$$x + 5 = 0 \rightarrow x = \dots\dots\dots$$

$$3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

• Con radicales

$$\sqrt{x+1} - 5 = 0$$

Despejar el radical y elevar al cuadrado.

$$\sqrt{x+1} = 5$$

$$(\sqrt{x+1})^2 = 5^2$$

.....

$$x = \dots\dots\dots$$

• Con x en el denominador

$$\frac{x-1}{x+1} + x = \frac{2 \cdot (3x+2)}{x+1}$$

Multiplicar los dos miembros por $(x + 1)$.

$$(x - 1) + x \cdot (x + 1) = 2 \cdot (3x + 2)$$

.....

.....

$$x = \dots\dots\dots$$

PRACTICA

1. Reduce y resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $5x - 9 + 3x = 13 - 4x + 2$

b) $3(x - 2) + 5x = 4x - 3(2x - 4) - 8$

c) $\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} = -\frac{2}{15} - \frac{2(x-3)}{4}$

d) $\frac{2(x+3)}{3} - \frac{3(x-1)}{4} = \frac{3-x}{3} - 1$

2. Reduce y resuelve estas ecuaciones:

a) $3x^2 - 24x = 0$

b) $5x^2 - 3 = x^2 + 6$

c) $(x-3)^2 + 1 = (x+2)^2 - 4x - 3(x-1)$

d) $\frac{x^2-1}{3} + \frac{3x^2+6}{6} = (x+1)^2 - (x+3)$

3. Resuelve estas ecuaciones directamente, sin reducirlas:

a) $(x-4)(x+1) = 0$

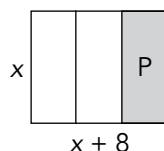
b) $(x-3)(x+2)(x^2-1) = 0$

4. Una empresa de multiservicios recibe el encargo de pintar la valla de una finca. Para cumplir el trabajo, envía a un equipo de operarios que tarda cuatro días en realizar la tarea. El primer día, un miércoles, pintan la tercera parte de la valla; al día siguiente, hacen dos quintas partes, y el viernes, como solo trabajan por la mañana, pintan un sexto de la valla. Por último, el lunes terminan los 18 metros de valla restantes. ¿Cuántos metros medía la valla?

Longitud de la valla $\rightarrow x$

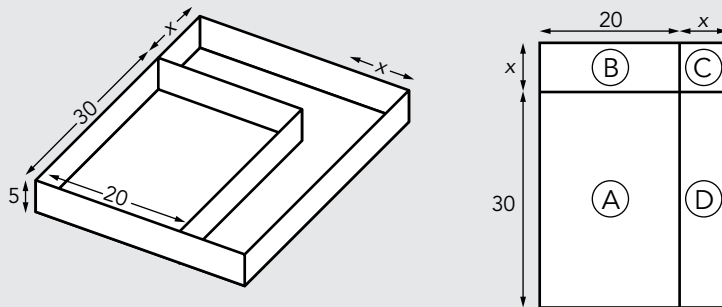
MIÉRCOLES $\frac{x}{3}$	+	JUEVES ...	+	VIERNES ...	+	LUNES ...	=	TOTAL DE LA VALLA ...
----------------------------	---	---------------	---	----------------	---	--------------	---	--------------------------

5. Una huerta rectangular es ocho metros más larga que ancha. La tercera parte está plantada de patatas, que ocupan 115 m^2 . ¿Cuáles son las dimensiones de la huerta?



APLICA. PROYECTO DE AMPLIACIÓN

Tu abuelo tiene una finca con un depósito de agua de $30 \text{ m} \times 20 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 3000 \text{ m}^3$ de capacidad. Ha conseguido comprar una tierra junto a la suya y quiere ampliar el depósito, aumentándolo en la misma cantidad de metros a lo largo y a lo ancho. Se ha hecho un poco de lío con los cálculos y te pide ayuda.



1. Te dice tu abuelo:

Para construir las paredes, he pensado contratar una cuadrilla de albañiles que se compromete a levantar las paredes a un ritmo de 10 metros lineales de pared por día.

¿Cuál sería la anchura, x , de la ampliación si quiero que hagan las paredes en 7 días?

2. “No sé qué cálculos hice yo”, te dice ahora, “pero para cubrir el suelo de las zonas B, C y D encargué 531 m^2 de losetas de terrazo. ¿Qué medida calculé para x ?

3. “Olvida los cálculos anteriores”, dice por último tu abuelo. “Definitivamente, lo que quiero es doblar la capacidad del depósito sin variar su profundidad”.

a) ¿Cuál debe ser entonces la medida definitiva de x ?

b) ¿Cuántos metros cuadrados de losetas hay que adquirir para el suelo de la ampliación?

c) ¿Cuánto tiempo tardará la cuadrilla de albañiles en hacer las paredes?

PRACTICA

1. Resuelve las ecuaciones de primer grado siguientes:

a) $2\left(\frac{2x-1}{3} - \frac{x+2}{2}\right) - 2x = x + \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} + x\right) = 1 - 2x$

2. Resuelve estas ecuaciones de segundo grado:

a) $(x+4)^2 - (2x-1)^2 = 8x$

b) $\frac{x(x-1)}{3} - \frac{x(x+1)}{4} = -\frac{3x+4}{12}$

3. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\sqrt{3x+4} + 2x = 4$

b) $x - \sqrt{2x-1} = 1 - x$

4. Reflexiona: ¿Para qué valores de m , la ecuación $x^2 - 2x + m = 0$ no tiene solución?

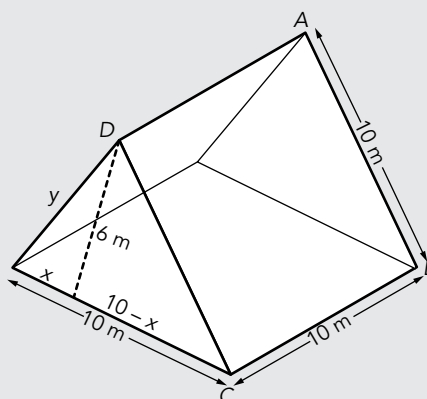
5. Un rectángulo es 15 cm más largo que ancho. Aumentando en un 20% el ancho y reduciendo en un 20% el largo, se convierte en un cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

6. Un cicloturista sale de A hacia B a la vez que otro ciclista, entrenando, sale de B hacia A y se cruzan al cabo de 18 minutos. ¿Cuánto tiempo invierte cada uno en cubrir el recorrido completo, sabiendo que el primero tarda un cuarto de hora más que el segundo?

APLICA. CONSTRUCCIÓN DE UNA BUHARDILLA

Tus vecinos quieren construir, sobre su casa de planta cuadrada, una buhardilla de 6 m de altura y con 10 m de vertiente AB , tal como se ve en el dibujo.

Como saben que estás en 4.º de ESO, te piden que les ayudes con los cálculos.



1. Lo primero que quieren saber es a qué distancias x y $10 - x$ caerá la vertical del vértice superior. Diles el dato que necesitan para empezar la construcción de su buhardilla.
2. Después del dato anterior, te preguntan cuál será la longitud de la vertiente más corta, y .
3. Uno de los frontales de la buhardilla la van a recubrir con piedra que, cuanto más cara es, más les gusta. Pero tienen para ello un precio ajustado: pueden gastarse entre 750 € y 900 €. ¿Entre qué precios deben buscar (el precio de la piedra se da en €/m²)?
4. En el techo de la vertiente AB quieren poner una ventana de 2 m² de superficie que tendrá 35 cm más de ancho que de alto. ¿Qué medidas deben encargar?

Unidad 6

Ficha de trabajo A

PRACTICA

- a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = 1$
 c) $x = 3$ d) $x = -11$
- a) $x_1 = 0, x_2 = 8$ b) $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$
 c) $x = 1$ d) $x_1 = 2, x_2 = -8$
- a) $x_1 = 4, x_2 = -1$
 b) $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1$
- La valla medía 180 m.
- La huerta mide 15 m $\times$ 23 m.

APLICA

- $x = 5$ m
- $x = 9$ m
- a) $x = 10$ m
 b) 600 m²
 c) Tardará 9 días.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

- a) $x = -\frac{19}{16}$ b) $x = 1$
- a) $x_1 = -\frac{5}{3}; x_2 = 3$ b) $x = 2$
- a) $x = \frac{3}{4}$ b) $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$
- Para $m > 1$.
- El rectángulo tiene 45 cm de largo y 30 cm de ancho.
- El cicloturista tarda 45 minutos y quien entrena, 30 minutos.

APLICA

- $x = 2$. El vértice superior caerá a 2 m de un extremo y a 8 m del otro.
- La vertiente menor medirá $2\sqrt{10}$ m, unos 6,32 m, aproximadamente.
- $0x \geq 750$ y $30x \leq 900$
 Deben buscar precios entre 25 €/m² y 30 €/m².
- Deben encargar una ventana de 160 cm de ancho y 125 m de alto.

SISTEMAS DE ECUACIONES

ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

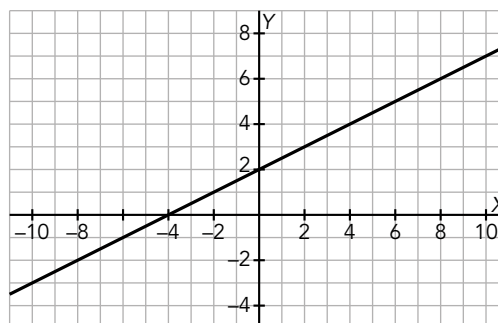
- Una **ecuación** con dos incógnitas es **lineal** si se puede escribir de la forma:

Una ecuación tiene soluciones.

Gráficamente, cada ecuación se representa mediante una

$$x - 2y + 4 = 0 \rightarrow y = \frac{x+4}{2}$$

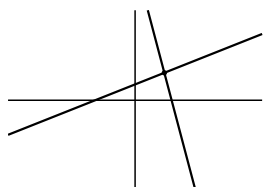
x	-4	-2	0	1	2	4	...
y	0	1	...	...	...	...	...



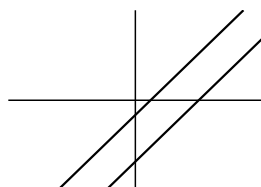
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Varias ecuaciones forman un sistema cuando

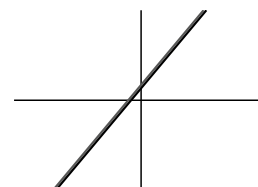
- Un sistema **compatible** tiene una solución: el punto de corte de



- Un sistema **incompatible** no tiene solución: Las rectas son



- Un sistema **indeterminado** tiene infinitas soluciones. Las rectas se superponen.



MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

• Sustitución

Se despeja una incógnita en una ecuación y se

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 2y = 22 \end{cases} \rightarrow x = 5 + y$$

• Igualación

Se despeja la misma incógnita de ambas ecuaciones y se

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 3y = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 - y \\ x = 14 - 3y \end{cases}$$

• Reducción

Se multiplica cada ecuación por el número adecuado para que ambas ecuaciones

$$\begin{cases} 5x - 4y = 9 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x - 4y = 9 \\ 6x + 4y = -2 \end{cases}$$

SISTEMAS NO LINEALES

- Tienen alguna ecuación de segundo grado, o con incógnitas en los denominadores, o con radicales...

Se resuelven aplicando los métodos conocidos.

$$\begin{cases} x - 1 = 1 \\ x^2 - y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 14 \end{cases}$$

PRACTICA

1. Resuelve estos sistemas por el método de reducción:

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x - 4y = -9 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

2. Resuelve estos sistemas por el método de sustitución:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ x + 5y = -7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

3. Resuelve estos sistemas por el método de igualación:

$$a) \begin{cases} 4x + y = 3 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 5y = 6 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

4. Reduce el sistema y luego resuélvelo por el método que prefieras:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{3} - \frac{2(x-y)}{5} = \frac{11}{5} \\ \frac{3x+y}{2} + 2(x-y) = \frac{-9}{2} \end{cases}$$

5. Jorge tiene 27 años más que su hija Pilar. Dentro de 8 años, la edad de Jorge será el doble que la de Pilar. ¿Cuántos años tiene cada uno?

	HOY	DENTRO DE 8 AÑOS
JORGE	x	x + 8
HIJA	y	y + 8

$$\rightarrow \begin{cases} x - y = \dots\dots\dots \\ x + 8 = 2 \cdot (\dots\dots\dots) \end{cases}$$

6. Con dos calidades de vino, una de 3,50 €/litro y la otra de 1,50 €/litro, se han obtenido 50 litros de mezcla, que sale a 2,30 €/litro. ¿Cuántos litros de cada tipo se han utilizado?

APLICA. DEGUSTACIÓN DE CAFÉ

Una cafetería propone una degustación de café acompañada de un concurso. El ganador podrá desayunar gratis todos los fines de semana durante medio año. En primer lugar, os dicen que van a hacer mezclas con tres tipos de cafés: el tipo A cuesta 6 €/kg; el tipo B, 8 €/kg; y el C, 10 €/kg.

1. Lo primero que os muestran es la mezcla "Trópico". Esta consta de cafés del tipo A y del tipo B, a partes iguales. ¿A cómo sale el kilo de mezcla?
2. La segunda prueba consiste, además de probar la mezcla "Caribeña", en calcular la cantidad de café de tipo A y de café de tipo C que han utilizado para ella. Os dicen que han obtenido 20 kg de mezcla a un coste de 7 €/kg.
3. Para la tercera pregunta no tenéis que probar ningún café. Solo os piden que les digáis si pueden obtener 20 kg de mezcla con cafés de los tipos B y C a 7 €/kg. ¿Pueden conseguirlo?
4. Después de un buen rato, prosigue la degustación con la mezcla llamada "Sabroso". En este caso también han obtenido 20 kg con un precio de 8,70 €/kg. Os vuelven a pedir las cantidades de B y C utilizadas en esta mezcla.
5. Y para terminar os preguntan: ¿Cuántos kilos de café de tipo A y cuántos de tipo B hay que mezclar con 5 kilos de café C para obtener 20 kilos de mezcla a 8 €/kg?

PRACTICA

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método que se indica:

a) Sustitución:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 3 \\ 4x + \frac{y}{2} = 14 \end{cases}$$

b) Reducción:

$$\begin{cases} 15x + 16y = 14 \\ 30x - 8y = 68 \end{cases}$$

2. Reduce el siguiente sistema y luego resuélvelo por el método que consideres más adecuado:

$$\begin{cases} \frac{5(x+1)}{3} - \frac{x+y}{2} = \frac{7}{2} \\ 2(x-y+5) - \frac{x+y}{3} = 11 \end{cases}$$

3. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 54 \end{cases}$

4. Una furgoneta tarda, en ir de A a B, 18 minutos más que un coche cuya velocidad supera a la de la furgoneta en 20 km/h. Sabiendo que la distancia entre A y B es de 120 km, calcula la velocidad de cada vehículo y el tiempo que tarda cada uno en cubrir su recorrido.

(Nota: 18 min = 18/60 de hora = 0,3 h)

	VELOCIDAD	TIEMPO
FURGONETA	x km/h	y + 0,3 h
COCHE	(x + 20) km/h	y

Distancia = Velocidad · Tiempo

5. Un trabajador eventual cobra 8 € más por cada hora que trabaja de noche que por cada hora que trabaja de día. Esta semana ha facturado, en total, 43 horas y ha cobrado 420 € por el trabajo de día y 160 € por el de noche. ¿Cuántas horas ha hecho de noche y cuánto ha cobrado por cada una?

	HORAS	PRECIO (€/h)
NOCHE	x	y
DÍA	43 - x	y - 8

APLICA. OFERTAS EN EL SUPERMERCADO

El supermercado de tu barrio quiere promocionar una marca de productos alimenticios. Los responsables del supermercado os cuentan las distintas promociones que tienen pensado hacer y os piden opinión.

1. *Pack de yogures a 3,60 €. Llevándose 3 unidades más, pagará 4,50 €, pero cada yogur sale 0,10 € menos que su precio inicial. Quieren saber cuántos yogures deben colocar en cada pack y cuál debe ser el precio individual inicial y cuál será el precio de cada yogur si un cliente acepta la oferta.*
2. *Por una tarrina de mantequilla y un tarro de mermelada, pague 4 €. Llevando 2 tarrinas y 3 tarros, pague 7,60 € y ahorrese un 20% en cada tarrina y en cada tarro. Como antes, lo que quieren saber es cuál debe ser el precio inicial de cada tarrina de mantequilla y de cada tarro de mermelada, y cuáles serían los precios si un cliente se llevase la oferta.*
3. *Por 2 bricks de zumo de naranja, un brick de zumo de manzana y un brick de zumo de melocotón, pague 6 €. Por 2 bricks de zumo de naranja y 2 de zumo de manzana, pague 5 €. Por 3 bricks de zumo de naranja y 2 de melocotón, pague 8 €. ¿A cómo sale cada brick de zumo?*
4. *Pack de 4 flanes y 4 natillas, por 4 €. Llevándose un pack de 6 flanes y 6 natillas, pague 5,25 € ahorrándose unas natillas. ¿Cuáles son los precios iniciales de un flan y de unas natillas?*

Ficha de trabajo A

1. a) $(1, -2)$ b) $(-1, 1)$
2. a) $(3, -2)$ b) $(1, -2)$
3. a) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ b) $(1, 1)$
4. $(0, 3)$
5. Jorge tiene 46 años, y Pilar, 19.
6. Se han utilizado 20 l del de calidad superior y 20 l del de calidad inferior.

1. La mezcla sale a 7 €/kg.
2. La mezcla tiene 15 kg del tipo A y 5 kg del tipo C.
3. No pueden conseguir una mezcla a 7 €/kg porque los dos componentes tiene un precio superior.
4. La mezcla tiene 13 kg del tipo B y 7 kg del tipo C.
5. La mezcla debe tener 5 kg del tipo A, 10 kg del tipo B y 5 kg del tipo C.

1. a) $(3, 4)$ b) $(2, -1)$
2. $(2, 1)$
3. a) $(3, -5)$ b) $(9, 6)$
4. La furgoneta va a 80 km/h y tarda 1 h 30 min.
El coche va a 100 km/h y tarda 1 h 12 min.
5. Ha trabajado 8 horas de noche, a 20 €/h.

1. Cada pack inicial debe tener 6 unidades y cada unidad debe costar 60 céntimos.
Si se llevan 9 unidades pagarán 50 céntimos por cada una.
2. La tarrina de mantequilla debe costar 2,50 € y el tarro de mermelada, 1,50 €.
Si se llevan 2 tarrinas y 3 tarros pagarán 2 € por cada tarrina de mantequilla y 1,20 € por cada tarro de mermelada.
3. El brick de zumo de naranja debe costar 1 €; el de manzana, 1,50 €; y el de melocotón, 2,50 €.
4. Un flan cuesta 25 cént. y unas natillas, 75 cént.

FUNCIONES

FORMAS DE DAR UNA FUNCIÓN

Una función puede darse por:

- Una
-
-
-

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Una gráfica representa una función si a cada valor de x le

EJEMPLOS: **Función**



No función



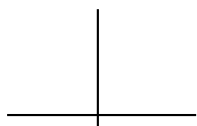
CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO, MÁXIMOS Y MÍNIMOS

- f es **creciente** en un intervalo si
- f es **decreciente** en un intervalo si
- f tiene un **máximo relativo** en un punto cuando
- f tiene un **mínimo relativo** en un punto cuando

DISCONTINUIDADES

- Razones por las que una función puede ser **discontinua** en un punto:

a) Tiene ramas



b)



c)



d)



- Se dice que una función es **continua** cuando

VARIACIÓN DE UNA FUNCIÓN

TASA DE VARIACIÓN MEDIA EN $[a, b]$

- Es la pendiente de

$$\text{T.V.M. } [a, b] = \dots\dots\dots$$

- Mide el grado de

TENDENCIA Y PERIODICIDAD

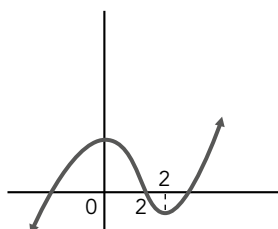
Una función **tiende** a un determinado valor b cuando al crecer la x el valor de la función se acerca a b .

Una función es **periódica** cuando su comportamiento se repite cada vez que la x recorre un cierto intervalo al que llamamos periodo.

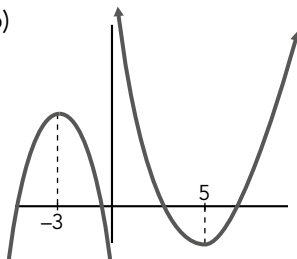
PRACTICA

Observa la gráfica de estas funciones:

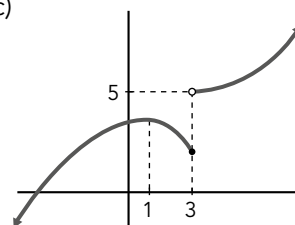
a)



b)



c)

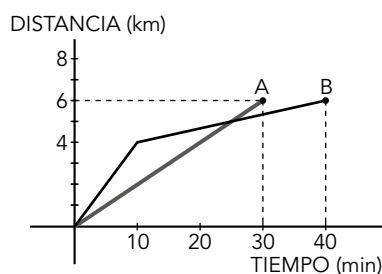


1. ¿Cuál es el dominio de cada una?

2. Indica cuáles son continuas y qué tipos de discontinuidad tienen las que no lo sean.

3. Expresa con lenguaje apropiado los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

4. Las siguientes gráficas muestran las trayectorias de dos corredores A y B durante una carrera de 6 km.



a) ¿Cuántos minutos por kilómetro emplea cada corredor en los primeros 10 minutos?

b) ¿Y entre los 10 y los 25 minutos?

c) ¿Cuántos kilómetros llevan recorridos ambos corredores cuando se encuentran?

d) ¿Cuántos minutos por kilómetro ha empleado cada corredor, por término medio, en toda la carrera?

APLICA. EL MEDIO MARATÓN

Un entrenador de atletismo ha elaborado unas tablas sobre la última carrera en la que han participado tres miembros del equipo, para poder elaborar un plan de entrenamiento adaptado al grupo.

CORREDOR A	TIEMPO (min)	6'	30'	40'	60'	80'
	DISTANCIA (km)	1	5	10	15	20
CORREDOR B	TIEMPO (min)	4'	20'	40'	80'	90'
	DISTANCIA (km)	1	5	10	15	20
CORREDOR C	TIEMPO (min)	6'	30'	40'	75'	100'
	DISTANCIA (km)	1	5	10	15	20

1. Elabora una gráfica donde se vean representadas las tres tablas. Coloca el tiempo en el eje X y la distancia en el Y.
2. El entrenador desea comparar el ritmo de carrera medio (min/km) en cada tramo de 5 km. Construye una tabla de 4 filas con los intervalos de distancia ([0, 5], [5, 10], [10, 15] y [15, 20]) y 3 columnas (corredores A, B y C).
3. ¿Cuál ha sido el ritmo medio de carrera para los tres corredores?
4. El entrenador, que no vio la primera parte de la carrera, quiere que le contéis, si podéis, qué ocurrió en los primeros 40 minutos.
5. ¿Qué ocurre a partir del minuto 40 de carrera?

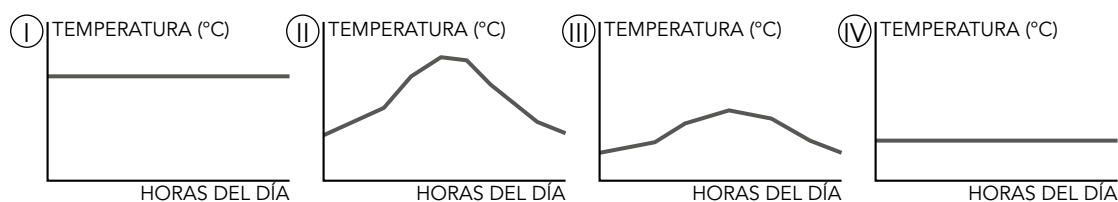
Nombre y apellidos:

Curso: Fecha:

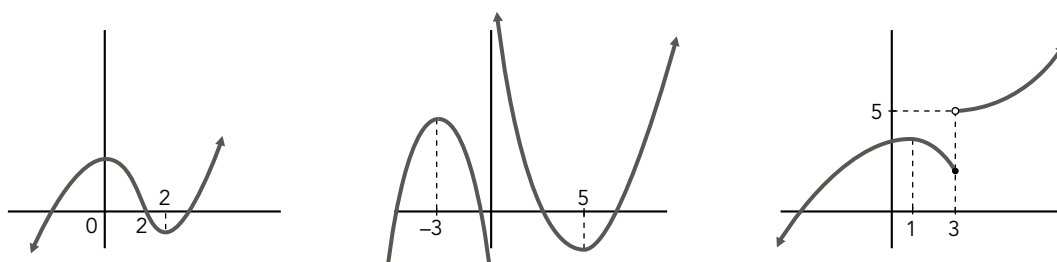
PRACTICA

1. Asocia cada uno de los enunciados sobre la temperatura en una habitación a lo largo de un día con su correspondiente gráfica:

- a) Es verano y la calefacción y el aire acondicionado están apagados.
- b) Es verano y el aire acondicionado está encendido.
- c) Es invierno y la calefacción está encendida.
- d) Es invierno y la calefacción y el aire acondicionado están apagados.



2. Observa las gráficas de las funciones siguientes:



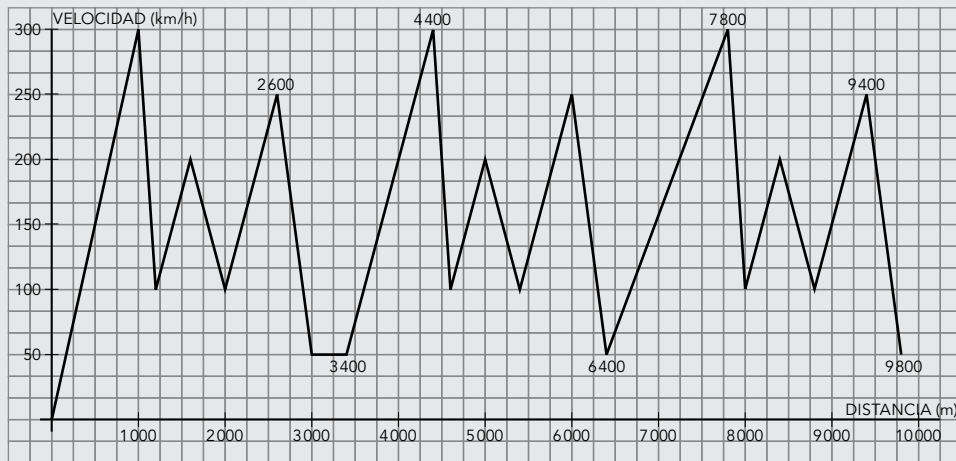
a) ¿Cuál es el dominio de cada una?

b) Indica cuáles son continuas y qué tipos de discontinuidad tienen las que no lo sean.

c) Expresa con lenguaje apropiado los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

APLICA. GRAN PREMIO DE FÓRMULA 1

Ángel quiere estudiar la última carrera de su corredor favorito. Para ello, se ha descargado de internet los datos de velocidad y ha elaborado la siguiente gráfica que representa tres vueltas del circuito:



1. ¿En qué momento alcanzó la velocidad máxima? ¿Y la mínima?
2. ¿En qué puntos del circuito hay curvas?
3. En un momento de la carrera pretendió pasar por boxes por una avería, pero se arregló antes de llegar a su zona de equipo. ¿Cuándo fue eso? Recuerda que en esta zona la velocidad está limitada. ¿A cuánto?
4. ¿Representa la gráfica a una función periódica? ¿Por qué?

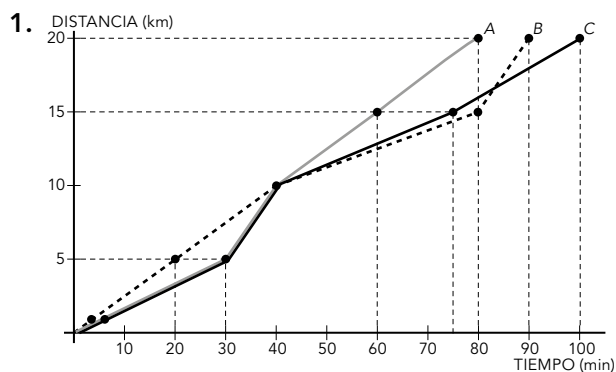
Unidad 8

Ficha de trabajo A

PRACTICA

- Igual al 2-a de la ficha B.
- Igual al 2-b de la ficha B.
- Igual al 2-c de la ficha B.
- A lleva $10 : 2 = 5$ min/km.
B lleva $10 : 4 = 2,25$ min/km.
 - Entre los 10 y los 25 minutos, A ha recorrido 3 km, luego mantiene el ritmo de 5 min/km; en cambio, B se derrumba: recorre 1 km en el mismo período, luego lleva un ritmo de 15 min/km.
 - Ambos se encuentran cuando llevan 5 km.
 - A realiza la carrera a un ritmo constante de $30 : 6 = 5$ min/km; pero B ha sido más irregular y su promedio general ha sido $40 : 6 = 6,7$ min/km.

APLICA



2.

	A	B	C
[0, 5]	6 min/km	4 min/km	6 min/km
[5, 10]	2 min/km	4 min/km	2 min/km
[10, 15]	4 min/km	8 min/km	7 min/km
[15, 20]	4 min/km	2 min/km	5 min/km

- Para el corredor A: 4 min/km.
 Para el corredor B: 4,5 min/km.
 Para el corredor C: 5 min/km.

- Hay dos partes: en la primera, B se destaca claramente de A y de C, que corren a la par. A partir del kilómetro 5, A y C aceleran hasta alcanzar a B al llegar al kilómetro 10.
- A y C adelantan a B, momento que aprovecha A para depegarse de los otros dos corredores.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

- $\rightarrow \textcircled{\text{II}}$
 - $\rightarrow \textcircled{\text{I}}$
 - $\rightarrow \textcircled{\text{IV}}$
 - $\rightarrow \textcircled{\text{III}}$
- i) $\mathbb{R}$ ii) $\mathbb{R} - \{0\}$ iii) $\mathbb{R}$
 - i) Es continua en todo $\mathbb{R}$.
ii) Discontinuidad de ramas infinitas en $x = 0$.
iii) Discontinuidad de salto finito en $x = 3$.
 - i) Crece en $(-\infty, 0)$ y en $(3, +\infty)$.
Decrece en $(0, 3)$.
Máx. en $x = 0$ y mín. en $x = 3$.
ii) Crece en $(-\infty, -3)$ y en $(5, +\infty)$.
Decrece en $(-3, 0)$ y en $(0, 5)$.
Máx. en $x = -3$ y mín. en $x = 5$.
iii) Crece en $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$.
Decrece en $(1, 3)$.
Máx. en $x = 1$.

APLICA

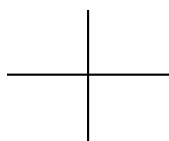
- La velocidad máxima, 300 km/h, la alcanzó a los 1 000 m, a los 4 400 m y a los 7 800 m. La velocidad mínima la alcanzó en la salida.
- Hay una curva en los tramos donde la función es decreciente, que es donde la velocidad decrece.
- Entró en el kilómetro 3 y la velocidad está limitada a 50 km/h.
- No, porque la función no se repite exactamente.

FUNCIONES ELEMENTALES

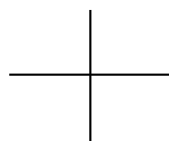
TIPOS DE FUNCIONES LINEALES

Función de proporcionalidad

- Su ecuación es
- Su gráfica es una recta que pasa por

Función constante

- Su ecuación es
- Su gráfica es una recta paralela

Expresión general $y = mx + n$

- Su gráfica es una recta que pasa por
- m es
- n es



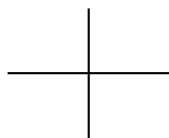
FUNCIONES CUADRÁTICAS

Las funciones cuadráticas tienen por ecuación $y = \dots\dots\dots$

Se representan mediante una Su eje es

— Si $a > 0$, las ramas van

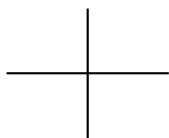
— Si $a < 0$, las ramas van



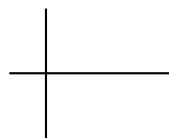
La abscisa del vértice es $x = \dots\dots\dots$ Cuanto mayor es $|a|$, la parábola es

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

- Su ecuación es
- No está definida en
- GRÁFICA

FUNCIONES RADICALES

- Su ecuación es $y = \dots\dots\dots$
- No están definidas en
- GRÁFICA



FUNCIONES EXPONENCIALES

- Su ecuación es La base es un número
- Están definidas en
- Pasan por los puntos $(0, \dots)$ y $(1, \dots)$.
- GRÁFICA



PRACTICA

1. Halla la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes rectas y represéntalas:

a) $y = 3x + 2$

b) $y = \frac{2x-3}{4}$

c) $2x + y = 5$

2. Representa las parábolas siguientes, indicando en cada caso su orientación, vértice y puntos de corte con los ejes:

a) $y = x^2 - x - 2$

b) $y = x^2 - 4x$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$

3. Representa estas funciones de proporcionalidad inversa:

a) $y = \frac{3}{x}$

b) $y = \frac{-3}{x} + 1$

4. Representa estas funciones exponenciales:

a) $y = 3^x$

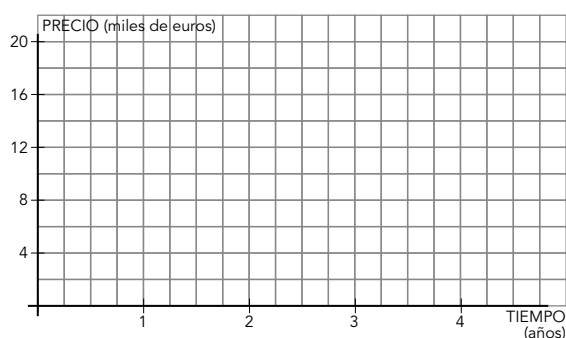
b) $y = (0,5)^x$

APLICA. VEHÍCULOS DE EMPRESA

Una multinacional química que acaba de instalarse en tu ciudad ha renovado su flota de vehículos para sus comerciales. Estos deben realizar grandes desplazamientos con el fin de dar a conocer los productos de la compañía.

1. La empresa tiene dos formas distintas de pagar a los comerciales por el desplazamiento:
 - 80 euros al mes más 15 céntimos por kilómetro.
 - 25 céntimos por kilómetro.
 - a) ¿A partir de qué distancia debe recorrer un comercial para que le valga la pena elegir la segunda opción de pago? ¿Cuánto le pagan por dicha distancia?
 - b) Dibuja las dos rectas correspondientes y comprueba que la solución es su punto de corte.

2. Las estadísticas dicen que, con el paso del tiempo, los coches pierden valor según la ecuación $C = \frac{-5t^2}{2} + 20$. Construye una tabla y una gráfica para la relación C = precio de un coche y t = años de antigüedad en un coche.



3. Han decidido que cambiarán la flota de coches cuando su precio llegue a la mitad de su valor inicial. A la vista de la gráfica, ¿cuándo ocurrirá esto, aproximadamente? Si no lo hicieran, ¿en qué año un coche no tendría ningún valor?

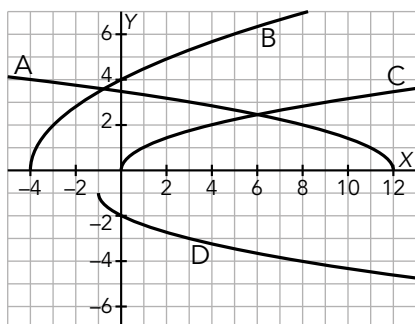
Nombre y apellidos:

Curso: Fecha:

PRACTICA

1. La parábola $y = x^2 + bx + c$ tiene el vértice en el punto (4, 9). Calcula los valores b y c y representa la función.

2. Asocia una de estas gráficas a cada una de las siguientes ecuaciones:



- i) $y = \sqrt{x}$
 ii) $y = -1 - \sqrt{x+1}$
 iii) $y = \sqrt{12-x}$
 iv) $y = 2\sqrt{x+4}$

3. Representa las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x+2}$

b) $y = \sqrt{1-x}$

c) $y = 2\sqrt{x+2}$

d) $y = -2 - \sqrt{x+1}$

4. Las funciones $y = 2^x$ e $y = 2^{2-x}$ se cortan en un punto. Representalas en los mismos ejes y encuentra el punto de corte (x, y) de ambas.

APLICA. PREVISIONES SOBRE CRECIMIENTO Y NECESIDADES DE UNA POBLACIÓN

El profesor de Matemáticas os plantea un problema demográfico de cierta región europea. En esa región hay dos grandes grupos de población: el grupo A lo integran unos 7 millones de habitantes, y el B, unos 3 millones. Los demógrafos de ese país, estudiando el crecimiento de la población en periodos de 5 años, observan que ambas comunidades siguen distintas proyecciones matemáticas de crecimiento:

A sigue la función $P_A = 6 + 1,5^t$

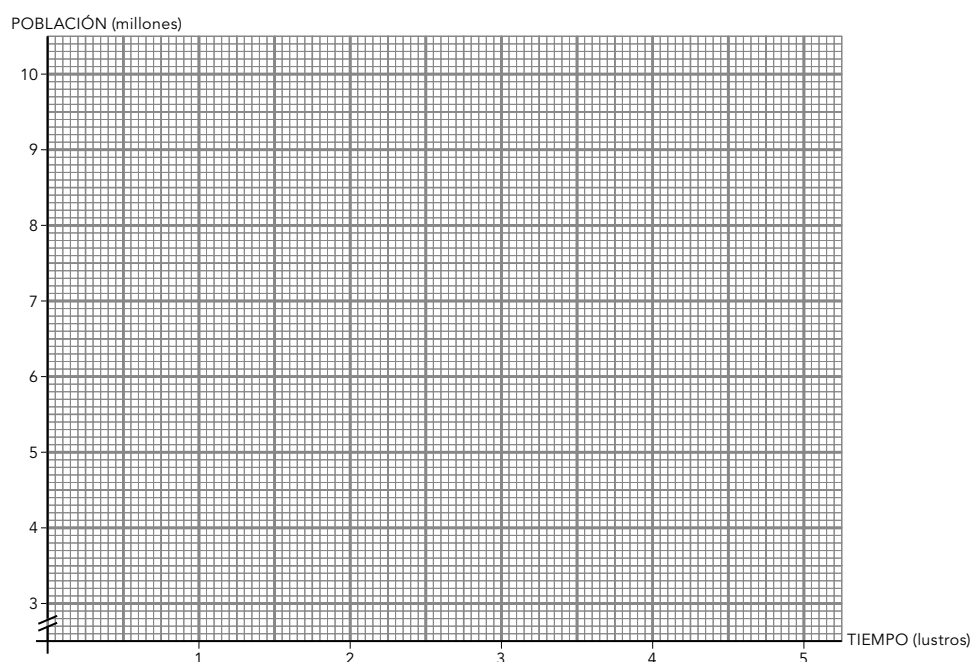
B sigue la función $P_B = 2 + 2^t$

donde t se mide en lustros (periodos de cinco años) y P son millones de habitantes.

1. Lo primero que os pide el profesor es que construyáis una tabla de crecimiento de población para cada uno de los dos grupos, desde $t = 0$ hasta $t = 5$ lustros. ¿Qué población crece más deprisa? ¿Llegará B a superar a A? ¿En qué periodo?

t	0	1	2	3	4	...	t
y							

2. Luego os pide que construyáis una gráfica aproximada de cada función. ¿Para qué valor de t ambas poblaciones serán iguales? El profesor os recomienda que dibujéis las dos gráficas sobre los mismos ejes coordenados.

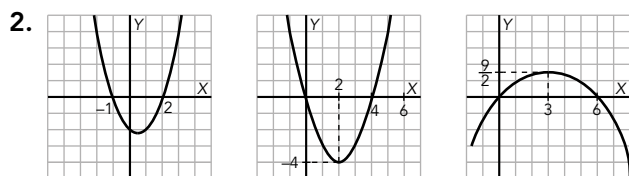
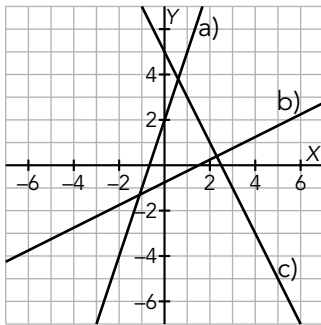


Unidad 9

Ficha de trabajo A

PRACTICA

1. a) $m = 3, n = 2$ b) $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{3}{4}$
 c) $m = -2, n = 5$



- a) $V(1/2; -2,25)$ b) $V(3, -4)$ c) $V(3, 1,2)$

Corte en:

$x = 0; y = -2$

$y = 0; x = -1$

$y = 0; x = 2$

Corte en:

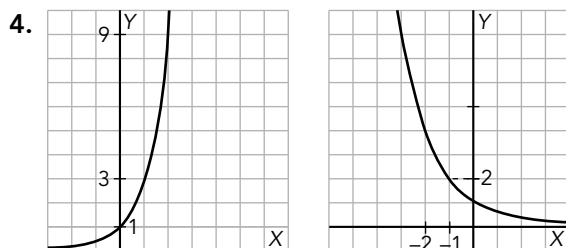
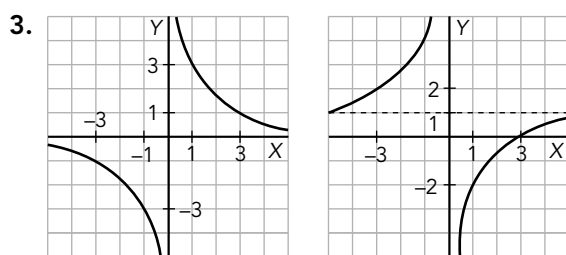
$x = 0; y = 0$

$y = 0; x = 4$

Corte en:

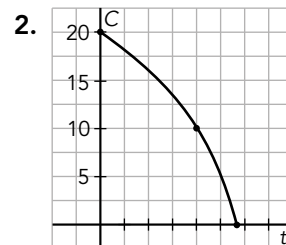
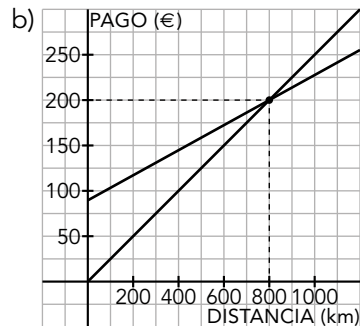
$x = 0; y = 0$

$y = 0; x = 6$



APLICA

1. a) A partir de 800 km, y le pagan 200 €.



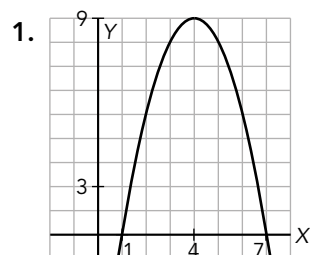
3. Cambiarán a los 4 años.

Pierden su valor ($C = 0$) a los 5,65 años.

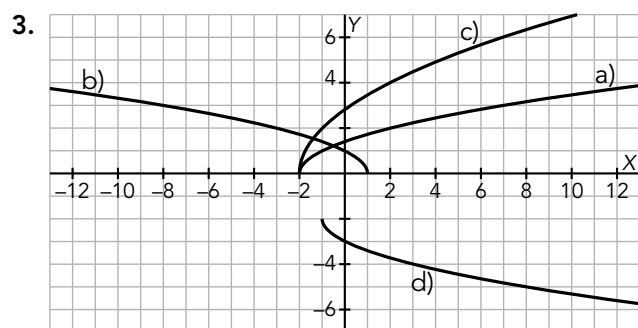
Unidad 9

Ficha de trabajo B

PRACTICA



2. A $\rightarrow$ iii); B $\rightarrow$ iv); C $\rightarrow$ i); D $\rightarrow$ ii)



4. Se cortan en el punto (1, 2).

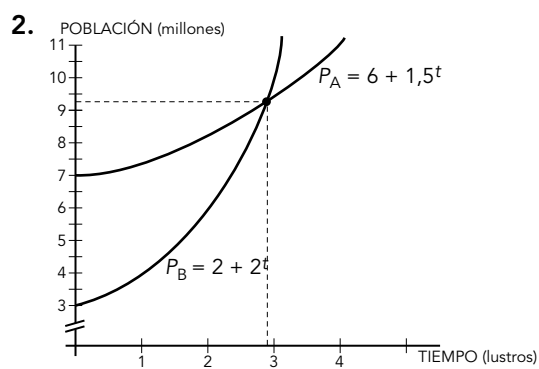
APLICA

1.

t	0	1	2	3	4	5
P_A	7	7,5	8,25	9,375	11,06	13,6

t	0	1	2	3	4	5
P_B	3	4	6	10	18	34

Crece más deprisa la población B. En 3 lustros, será mayor que la A.



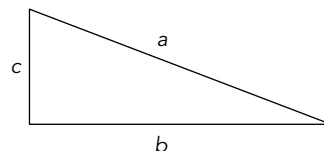
Las poblaciones se igualan, aproximadamente, a los 2,8 lustros = 14 años.

GEOMETRÍA

TEOREMA DE PITÁGORAS

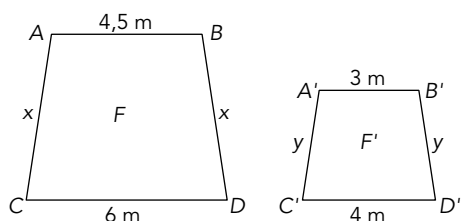
- En un triángulo rectángulo cualquiera, la suma de los cuadrados de los catetos es igual

$$a^2 = b^2 + \dots$$



FIGURAS SEMEJANTES

- Dos figuras son **semejantes** si sus ángulos correspondientes son y sus distancias



F y F' son semejantes, entonces $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \dots$;

Además, si $\overline{AB} = 1,5 \cdot \overline{A'B'}$, entonces:

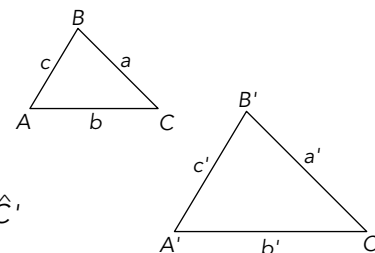
$$\overline{BC} = \dots \quad \overline{CD} = \dots \quad \overline{DA} = \dots \quad \overline{AC} = \dots$$

Semejanza de triángulos

Para que dos triángulos sean semejantes, basta que cumplan **una de estas condiciones**:

— Los lados son $\rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

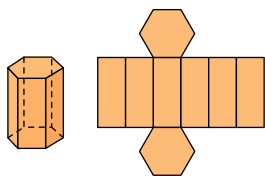
— Los ángulos correspondientes son $\rightarrow \hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$



ÁREA Y VOLUMEN DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

PRISMAS

$$A_{\text{LATERAL}} = \text{Perímetro de la base} \cdot \text{Altura}$$

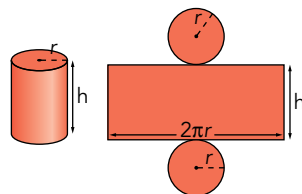


$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + 2 \cdot A_{\text{BASE}}$$

$$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura}$$

CILINDROS

$$A_{\text{LATERAL}} = 2\pi r \cdot h$$

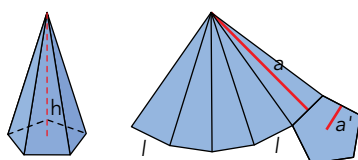


$$A_{\text{TOTAL}} = \dots + 2\pi r^2$$

$$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura}$$

PIRÁMIDES

$$A_{\text{LATERAL}} = \text{Perímetro de la base} \cdot \text{apotema}$$

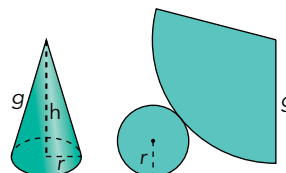


$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LATERAL}} + A_{\text{BASE}}$$

$$V = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura}}{3}$$

CONOS

$$A_{\text{LATERAL}} = \pi r g$$



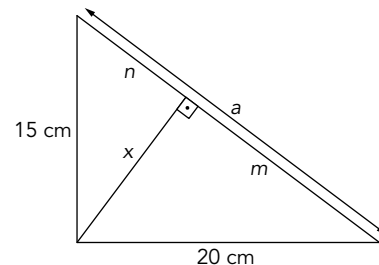
$$A_{\text{TOTAL}} = \dots + \pi r^2$$

$$V = \frac{\dots}{3}$$

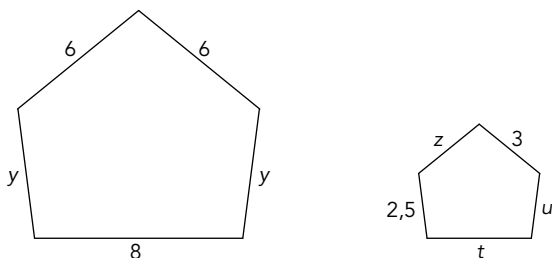
PRACTICA

1. Calcula:

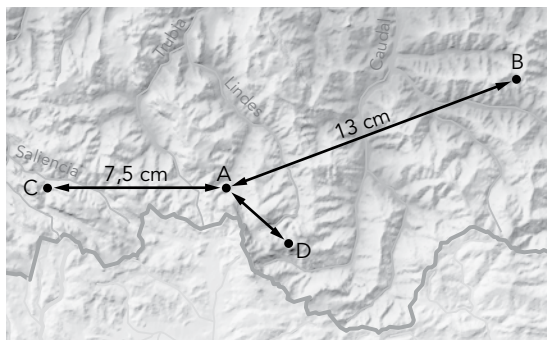
- La longitud de la hipotenusa, a , del triángulo.
- El área del triángulo.
- El valor de x , altura sobre la hipotenusa (ten en cuenta que ya conoces el área).
- Las longitudes m y n .



2. Estas dos figuras son semejantes. Calcula los datos que faltan.



3. Luis es un guía de senderismo que prepara una próxima excursión por un paraje natural. Maneja el plano adjunto donde, midiendo con una regla, observa que 1 km de la realidad equivale a 2 cm en el plano.

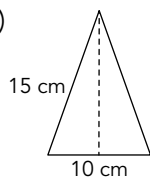


a) ¿A qué escala está el plano?

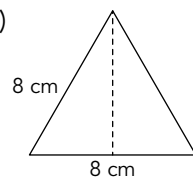
b) Calcula la distancia real de las etapas AC y AD (la medida de AD en el plano es 3,5 cm).

4. Calcula el área de estas figuras:

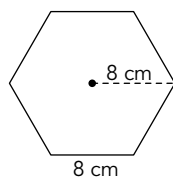
a)



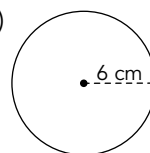
b)



c)

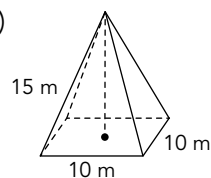


d)

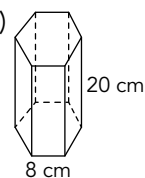


5. Calcula la medida de la superficie y del volumen de estos cuerpos:

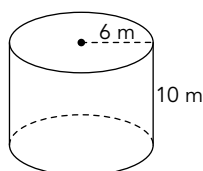
a)



b)



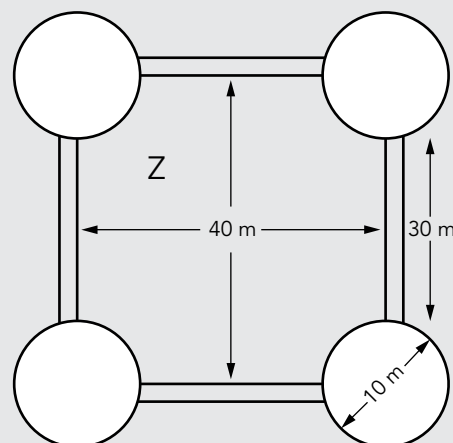
c)



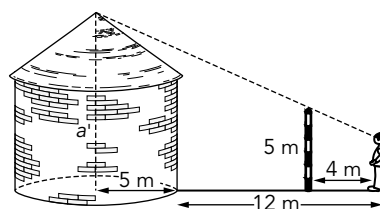
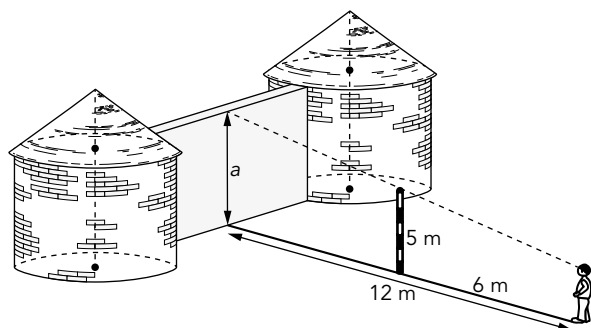
APLICA. REHABILITANDO EDIFICIOS ANTIGUOS

El ayuntamiento de tu localidad, junto al Ministerio de Cultura, decide rehabilitar y embellecer una construcción del siglo XVI, cuya planta es la que ves en el dibujo.

Los técnicos no han encontrado los planos originales de la construcción, por lo que les faltan algunas medidas.



1. Lo primero que quieren saber es el perímetro y la superficie de la zona interior Z. ¿Puedes ayudarles?
2. También necesitan saber cuál es la altura de las torres y la de los muros que las unen. Para ello, un operario de 1,75 m de altura se ayuda de un listón de 5 m y toma las medidas que ves en las imágenes. ¿Cuál es la altura de los muros? ¿Y la altura de las torres?

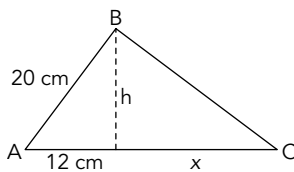


3. Se ha decidido renovar las cubiertas de los torreones con planchas de pizarra y, para hacer el presupuesto, se necesita conocer la superficie que hay que cubrir. ¿Podrías calcularla?
4. Por último, en uno de los torreones se va a montar un centro de interpretación de flora y fauna del entorno.

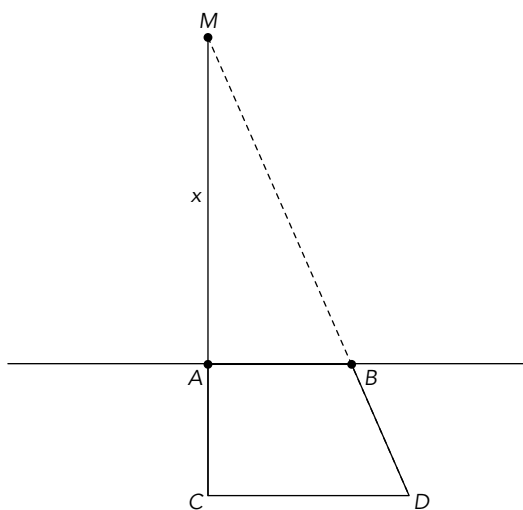
En su acondicionamiento, se va a instalar una bomba de frío y calor y, para decidir su potencia, se necesita saber cuántos metros cúbicos de aire debe acondicionar. Calcula ese dato.

PRACTICA

1. El triángulo ABC es rectángulo. Calcula su área.



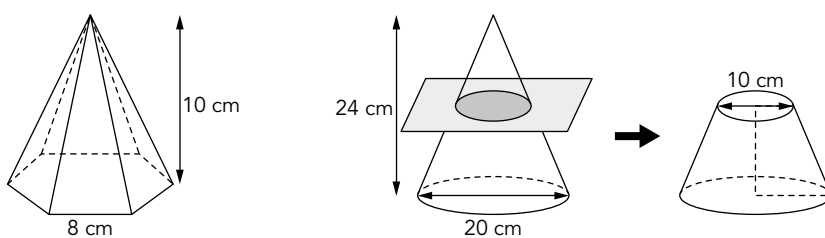
2. Para averiguar la distancia de un barco M a la orilla, Juan procede como en la figura adjunta.



Con piedras A, B, C, D mide las distancias $\overline{AB} = 50$ m, $\overline{AC} = 50$ m y $\overline{CD} = 70$ m. ¿Cuál será la distancia x de M a A ?

3. Yolanda ha construido una maqueta, a escala 1:500, de una pirámide de base cuadrada y cuyas caras son triángulos equiláteros que hay en el parque de su barrio. El área lateral de la maqueta es $86,60 \text{ cm}^2$, y el volumen, $788,6 \text{ cm}^3$. ¿Cuáles son el área lateral y el volumen de la pirámide en la realidad?

4. Observa las figuras y calcula.

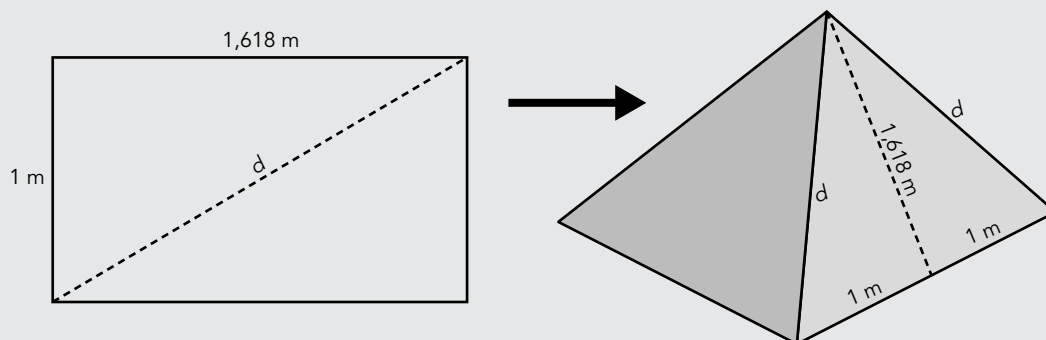


- a) El área total y el volumen de la pirámide.
b) El área total y el volumen del tronco de cono.

APLICA. MAQUETA DE LA GRAN PIRÁMIDE

Recuerda que un rectángulo áureo es aquel en el que la razón entre el lado mayor y el menor es $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$. Este número irracional es el llamado número de oro por los antiguos, y era para ellos la razón de la divina proporción. Se le conoce, también, por Φ .

Vuestra profesora de Matemáticas, aficionada a las maquetas, ha decidido construir una reproducción a escala de la gran pirámide de Keops. Y os da un dato: si se corta por su diagonal un rectángulo áureo, con sus dos mitades se puede formar un triángulo isósceles que reproduce a escala una de la caras laterales de la gran pirámide.



1. Para hacer la maqueta os dice que, antes de nada, hagáis algunos cálculos y completéis algunas de las dimensiones que va a tener la pirámide.

ARISTA DE LA BASE	APOTEMA	ARISTA LATERAL	ALTURA
2 m	1,618 m		

2. Con esos datos, calculad también:

- a) La superficie lateral de la maqueta.
- b) El volumen.

3. La profesora os sigue dando información: la altura de la pirámide original es de unos 148 m. Utilizando la proporcionalidad entre el modelo anterior y la pirámide real, os pide que calculéis:

- a) La superficie lateral de la gran pirámide.
- b) Su volumen.

Unidad 10

Ficha de trabajo A

PRACTICA

- a) $a = 25 \text{ cm}$ b) $A = 150 \text{ cm}^2$
 c) $x = 12 \text{ cm}$ d) $m = 16 \text{ cm}, n = 9 \text{ cm}$
- $t = 4; u = 2,5; y = 5; z = 3$
- a) 1:500000
 b) $\overline{AB} = 6,5 \text{ km}$
 $\overline{AC} = 3,75 \text{ km}$
 $\overline{AD} = 1,75 \text{ km}$
- a) $70,7 \text{ cm}^2$ b) $27,7 \text{ cm}^2$
 c) $166,28 \text{ cm}^2$ d) $113,04 \text{ cm}^2$
- a) $A = 382,84 \text{ m}^2; V = 440,96 \text{ m}^3$
 b) $A = 1292,56 \text{ cm}^2; V = 3325,6 \text{ cm}^3$
 c) $A = 602,88 \text{ m}^2; V = 1130,4 \text{ m}^3$

APLICA

- Perímetro = $151,4 \text{ m}$
Superficie = $1521,5 \text{ m}^2$
- Altura muros = $8,25 \text{ m}$
Altura torres = $15,57 \text{ m}$
- Superficie = $556,70 \text{ m}^2$
- Debe acondicionar $839,165 \text{ m}^3$.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

- $A = 266,67 \text{ cm}^2$
- El barco está a 125 m de la orilla.
- $A_{\text{LATERAL}} = 2165 \text{ m}^2$
 $V = 98575 \text{ m}^3$
- a) $A = 458,25 \text{ cm}^2$
 $V = 554,27 \text{ cm}^3$
 b) $A = 1004,8 \text{ cm}^2$
 $V = 2198 \text{ cm}^3$

APLICA

- a) Arista lateral = $1,90 \text{ m}$
 Altura = $1,272 \text{ m}$
- a) $S_{\text{LATERAL}} = 6,472 \text{ m}^2$
 b) $V = 1,696 \text{ m}^3$
- a) $S = 87617 \text{ m}^2$
 b) $V = 2671452 \text{ m}^3$

ESTADÍSTICA

VARIABLES ESTADÍSTICAS

Variables cuantitativas son las que

Pueden ser de uno de estos dos tipos:

- cuantitativas **discretas** si
- cuantitativas **continuas** si

Variables cualitativas son las que

EJEMPLOS: "la profesión del padre" es

"el peso" es

"el número de coches que hay en cada familia" es

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

MEDIA: $\bar{x}$ = ...

VARIANZA: Var = ...

DESVIACIÓN TÍPICA: σ = ...

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: C.V. = ...

EJEMPLO: Calcular $\bar{x}$, Var , σ y C.V. para los valores siguientes: 3, 4, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9

MEDIDAS DE POSICIÓN

Cada una de las medidas de posición es un parámetro que divide a la población en dos trozos de tamaños previstos.

- La **mediana**, Me , parte a la población en dos trozos

Es decir, el % de la población mide menos que Me y el % mide más.

- El cuartil inferior, Q_1 , deja por debajo al % y por encima al %.
- El cuartil superior, Q_3 , deja por debajo al % y por encima al %.

EJEMPLO: Di cuáles son la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:

2, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10

Nombre y apellidos:

Curso: Fecha:

PRACTICA

1. Durante una temporada futbolística se han contabilizado los signos de las quinielas registrándose los siguientes resultados:

x_i	f_i
1	304
X	152
2	44

Halla las frecuencias relativas y los porcentajes.

2. Las pulsaciones en reposo de 30 personas son:

84 83 65 72 62 86 65 72 69 73

83 74 79 76 87 71 70 74 75 80

65 74 86 78 66 72 69 75 77 73

- a) Haz una tabla de frecuencias agrupando los datos en 7 intervalos de 4 unidades.
 b) Representala gráficamente y halla las frecuencias relativas y los porcentajes.
 c) Calcula los parámetros $\bar{x}$, σ^2 , σ y C.V.

3. a) Calcula Q_1 , Me y Q_3 en la siguiente distribución:

1, 1, 2, 5, 7 7, 7, 8, 9, 11 11, 13, 14, 17, 20

- b) Representa los resultados en un diagrama de caja y bigotes.

APLICA. CONTROL DE LIMITACIÓN DE VELOCIDAD

En un punto conflictivo de una carretera existe un limitador de velocidad a 90 km/h. La Guardia Civil ha hecho un estudio estadístico, midiendo por radar la velocidad, en kilómetros por hora, de los vehículos que han pasado por allí durante una hora concreta. El resultado, correspondiente a 30 coches, ha sido el siguiente:

100	110	120	120	130	110	90	95
95	80	85	70	65	75	85	105
100	110	80	90	90	95	130	140
140	140	60	60	60	70		

1. El departamento de estudios estadísticos necesita agrupar los datos en una tabla para poder empezar con los cálculos. ¿Puedes ayudarles completando la siguiente tabla?

INTERVALO	MARCAS x_i	f_i	F_i	%	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
[58, 72)						
[72, 86)						
[86, 100)						
[100, 114)						
[114, 128)						
[128, 142)						

2. Necesitan que calcules los parámetros $\bar{x}$, Var , σ y C.V.

3. ¿En qué intervalo está el dato $Q_2 = Me$? ¿Cómo se interpreta ese dato?

PRACTICA

1. Después de una repoblación forestal de pinos en una comarca que sufrió un incendio años atrás, se han tomado las medidas de 50 pinos, las cuales, expresadas en centímetros, son las reflejadas en la tabla:

164	172	163	168	170	170	162	157	165	177
169	164	149	166	163	159	148	157	167	166
160	161	165	162	158	174	174	166	159	167
164	162	164	153	159	152	175	171	166	149
173	155	162	163	161	158	161	167	173	176

- a) Representalas en una tabla de frecuencias de 6 intervalos con 5 unidades.
- b) Representalas gráficamente y halla las frecuencias relativas y los porcentajes.
- c) Calcula la media, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.
2. La siguiente distribución expresa los minutos de retraso de un autobús (variable x_i) durante 50 días. Calcula Q_1 , Me , Q_3 , p_{20} y p_{90} .

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	2	1	5	2	8	7	5	7	4	7	2

APLICA. ESTADÍSTICA Y NEGOCIOS

Un empresario invierte 1 millón de euros en cada una de las tres tiendas de ropa *A*, *B* y *C*, que tiene abiertas en su ciudad. Los datos de beneficios o pérdidas (en miles de euros) que ha tenido cada mes, durante un año, están reflejados en la tabla adjunta:

	E	F	M	A	M	J	Jl	A	S	O	N	D
A	-10	-10	20	30	20	40	40	50	30	20	20	30
B	-20	-15	30	60	50	40	30	30	20	30	30	30
C	30	0	10	10	-10	-20	-10	10	10	20	10	10

El empresario pretende hacer un estudio de mercado sobre la viabilidad económica de sus tiendas.

1. En primer lugar, calcula los parámetros $\bar{x}$, Var , σ y C.V. para la tienda *A*.

2. Calcula los mismos parámetros para la tienda *B*.

3. Haz lo mismo con los datos de la tienda *C*.

Unidad 11

Ficha de trabajo A

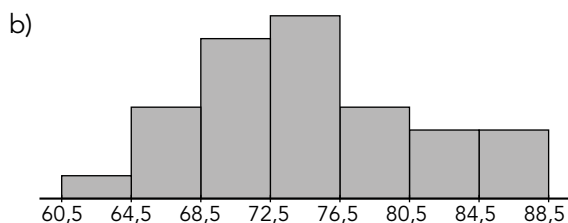
PRACTICA

1.

x_i	f_i	f_r	%
1	304	0,608	60,8
X	152	0,304	30,4
2	44	0,088	8,8

2. a)

INTERVALOS	f_i	fr_i	% _i
60,5 - 64,5	1	0,033	3,3
64,5 - 68,5	4	0,133	13,3
68,5 - 72,5	7	0,233	23,3
72,5 - 76,5	8	0,267	26,7
76,5 - 80,5	4	0,133	13,3
80,5 - 84,5	3	0,100	10
84,5 - 88,5	3	0,100	10
	30	1	100



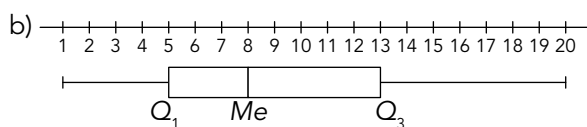
$$\bar{x} = 74,63$$

$$\sigma^2 = 39,94$$

c) $\sigma^2 = 6,32$

$$CV = 8,46\%$$

3. a) $Q_1 = 5$; $Me = 8$; $Q_3 = 13$



APLICA

1.

INTERVALO	MARCAS x_i	f_i	F_i
[58, 72)	65	6	6
[72, 86)	79	5	11
[86, 100)	93	6	17
[100, 114)	107	6	23
[114, 128)	121	2	25
[128, 142)	135	5	30

INTERVALO	%	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
[58, 72)	20	390	25350
[72, 86)	36,7	395	31205
[86, 100)	56,7	558	51894
[100, 114)	76,7	642	68694
[114, 128)	83,3	242	29282
[128, 142)	100	675	91125

2 $\bar{x} = 96,73$ km/h

$$Var = 561,64$$

$$\sigma = 23,7$$

$$C.V. = 0,25$$

3. La mediana está en el intervalo [86, 100), porque su F_i es mayor que 50%.

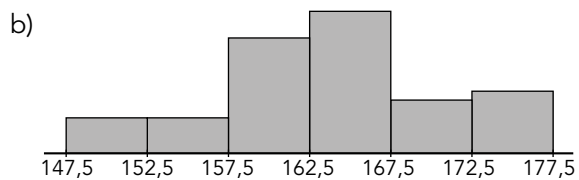
Unidad 11

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1. a)

INTERVALOS	f_i	fr_i	$\%_i$
147,5 - 152,5	4	0,080	8
152,5 - 157,5	4	0,080	8
157,5 - 162,5	13	0,260	26
162,5 - 167,5	16	0,320	32
167,5 - 172,5	6	0,120	12
172,5 - 177,5	7	0,140	14
	50	1,000	100



$$\bar{x} = 163,7$$

$$\sigma^2 = 47,75$$

c) $\sigma^2 = 6,91$

$$CV = 11,15\%$$

2. $Q_1 = 4$; $Me = 5,5$; $Q_3 = 8$; $p_{20} = 3,5$; $p_{90} = 9$

APLICA

1 $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{280}{12} = 23,33 \rightarrow 23\,330 \text{ €}$

$$Var = \frac{\sum x_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2 = 305,7$$

$$\sigma = \sqrt{Var} = 17,5$$

$$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,75 \approx 75\%$$

2 $\bar{x} = 26,25 \rightarrow 26\,250 \text{ €}$

$$Var = 488$$

$$\sigma = 22,1$$

$$C.V. = 0,84 \approx 84\%$$

3 $\bar{x} = 0,83 \rightarrow 830 \text{ €}$

$$Var = 207,7$$

$$\sigma = 14,4$$

$$C.V. = 17,36 \approx 1736\%$$

DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES

Distribución bidimensional: A cada individuo le asignamos

Nube de puntos: es la representación gráfica de una

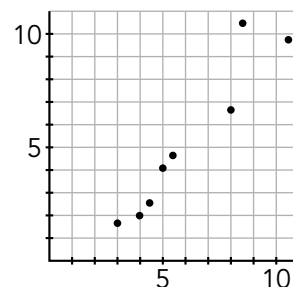
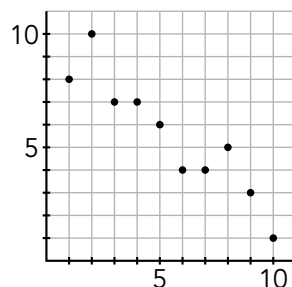
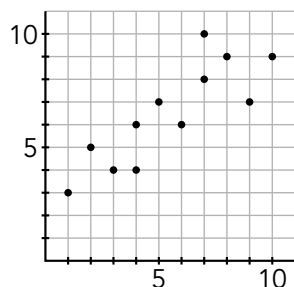
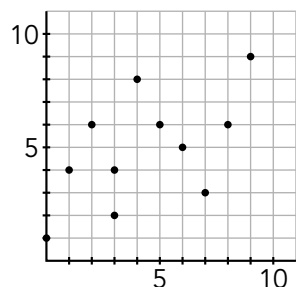
También se le llama diagrama de

Correlación: Si los puntos de la nube están

Puede ser:

- Fuerte cuando
- Débil cuando
- Positiva cuando
- Negativa cuando

EJEMPLOS: Di, en cada caso, si existe correlación, y si esta es fuerte, débil, positiva o negativa.



Coefficiente de correlación r , es un número que mide

Su valor está comprendido entre

Recta de regresión: Es la recta que

Su pendiente tiene el mismo que el coeficiente de

Estimaciones con la recta de regresión: La recta de regresión nos permite estimar el valor de

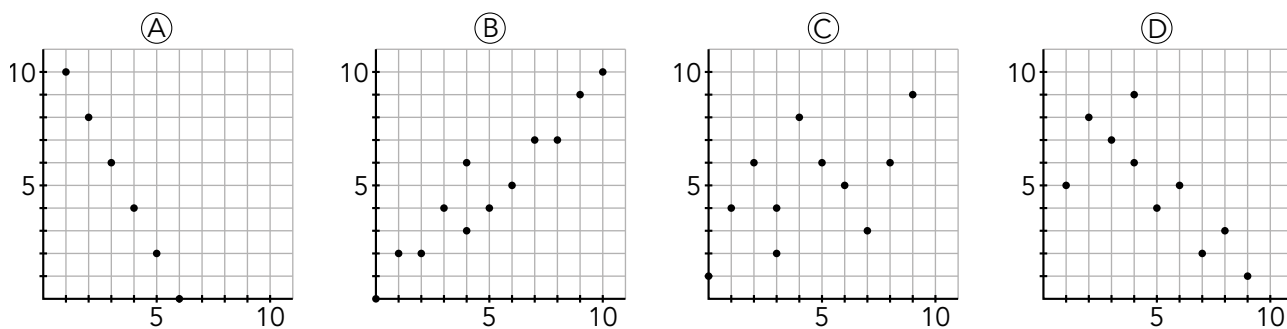
La **fiabilidad de la estimación** es mayor si $|r|$ es y si el punto sobre el que hacemos la estimación está

PRACTICA

1. En cada uno de los siguientes casos indica si se trata de una distribución bidimensional y cuáles son las variables que se relacionan.

- Estatura media de los padres-estatura de los hijos mayores de 18 años
- Ingresos de una familia-gasto en alimentación.
- Tiempo que tarda un tren en hacer un recorrido-precio del billete
- Número de personas que viven en un piso-litros de agua consumida en un año

2. Indica , en cada caso, si la correlación es fuerte o débil y si es positiva o negativa



3. Una distribución bidimensional viene dada por la siguiente tabla:

HORAS DE ESTUDIO	1	2	3	4	5	5
HORAS DE VIDEOJUEGOS	5	4	3	3	1	2

- Representa la nube de puntos.
- Di si hay correlación y de qué tipo es.
- Explica si el coeficiente de correlación puede ser 0,8.

APLICA. ÍNDICE DE DESARROLLO HUMANO EN ESPAÑA

El **índice de desarrollo humano (IDH)** es un indicador social elaborado por el *Programa de las Naciones Unidas* para el Desarrollo compuesto por tres parámetros: vida larga y saludable, educación y nivel de vida digno.

En la siguiente tabla se muestran algunos indicadores sociales, entre los que está el IDH, de 9 provincias españolas en 2010.

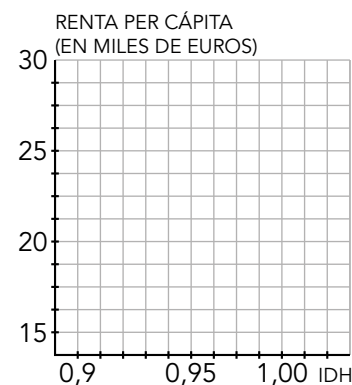
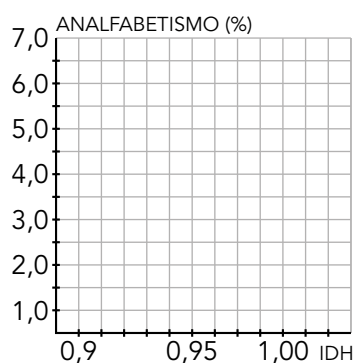
IDH	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91
ESPERANZA DE VIDA	83,1	84,2	83,6	83,2	82,9	82,4	81,8	82,0	81,1
ANALFABETOS (%)	0,7	0,9	1,0	1,3	2,1	2,3	2,7	4,2	4,8
RENTA PER CÁPITA (MILES DE €)	28,6	29,6	27,1	26,3	26,7	22,6	19,4	16,1	16,9

Nos vamos a centrar en las siguientes distribuciones bidimensionales:

1. IDH – Esperanza de vida
2. IDH – Porcentaje de analfabetismo
3. IDH – Renta per cápita

1. ¿Cuál crees que es positiva y cuál negativa?

2. Representa las nubes de puntos en unos ejes como estos y verifica la predicción que hiciste en la actividad anterior:



3. Traza, de forma aproximada, la recta de regresión sobre cada nube de puntos.

4. ¿Qué lectura extraes de este estudio?

5. Investiga en Internet en qué puesto del mundo está España según su IDH. ¿Qué otros criterios te parece conveniente tomar para medir el índice de desarrollo humano?

PRACTICA

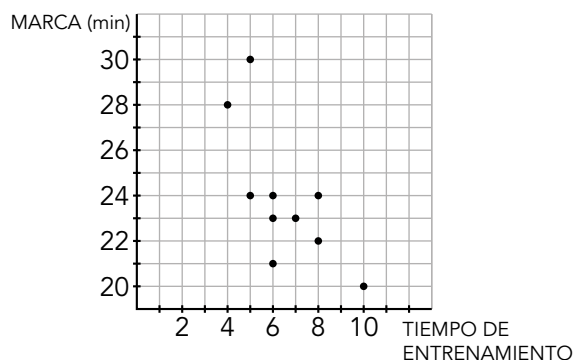
1. Las horas de estudio semanales que un grupo de estudiantes dedicó a preparar un examen global y la nota obtenida en la prueba, vienen dadas en la siguiente tabla

HORAS DE ESTUDIO	21	15	10	15	20	30	18	20	25	16
NOTA	9	7	5	2	7	8	8	6	5	4

- a) Representa el diagrama de dispersión
b) ¿Cuál de estos valores te parece más adecuado para el coeficiente de correlación:

0,92; -0,51; -0,85; 0,44

2. Se ha medido el número medio de horas de entrenamiento a la semana de un grupo de 10 atletas y el tiempo, en minutos, que han hecho en una carrera, obteniendo los siguientes resultados:



- a) Traza la recta de regresión que te parezca más adecuada.
b) Estima el tiempo que tardaría un atleta que ha entrenado 3 horas y otro que ha entrenado 15 horas.
c) Si el coeficiente de correlación es -0,71, ¿te parecen fiables las estimaciones anteriores?

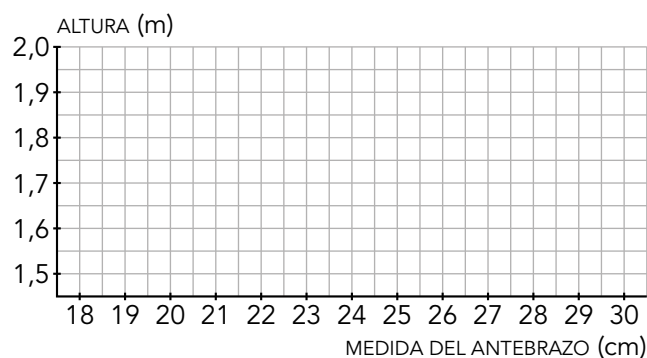
APLICA. MEDIDAS CORPORALES

Existen estudios que han detectado una alta correlación entre varias partes de la anatomía humana: entre otras, las medidas del antebrazo de las personas y su correspondiente altura.

En una consulta médica se ha querido comprobar este hecho, a modo de curiosidad y con el consentimiento de los pacientes. Para ello, se han tomado al azar 10 varones de distintas edades menores de 65 años. Se ha medido la altura y la longitud del antebrazo de cada uno. Estos son los resultados:

MEDIDA DEL ANTEBRAZO (cm)	22	31	25	18	30	24	27	29	20	23
ALTURA (m)	1,60	1,92	1,70	1,50	1,89	1,64	1,75	1,83	1,53	1,60

1. Representa en unos ejes como estos la nube de puntos correspondiente:



2. La recta de regresión tiene como ecuación $y = 0,033x + 0,88$. Represéntala sobre la nube de puntos del ejercicio anterior.
3. Uno de los siguientes valores es el coeficiente de correlación. Indica cuál es:



4. Estima, a partir de la recta de regresión, las alturas de las personas que tienen las siguientes medidas de antebrazo:
- a) 12 cm b) 25,5 cm c) 40 cm
5. ¿Qué grado de fiabilidad tienen las estimaciones que has realizado en la actividad anterior?

Unidad 12

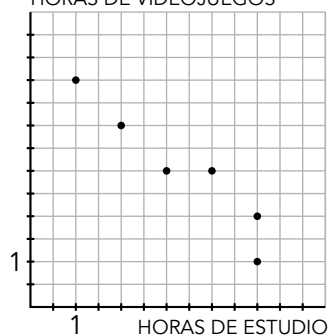
Ficha de trabajo A

PRACTICA

1. Son todas bidimensionales. a) Estatura media de los padres - estatura de los hijos mayores de 18 años; b) Ingresos de la familia - gasto en alimentación; c) Tiempo que tarda el recorrido - precio del billete; d) N° de personas que viven en el piso - litros de agua consumida.

2. A. Negativa y funcional. B. Positiva y fuerte.
C. Positiva y débil. D. Negativa y fuerte.

3. a) HORAS DE VIDEOJUEGOS



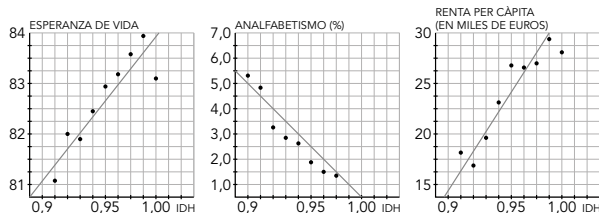
b) La correlación es negativa y fuerte.

c) No, debe ser negativa.

APLICA

1. Serán positivas las distribuciones 1 y 3. La distribución 2 será negativa.

2. y 3.



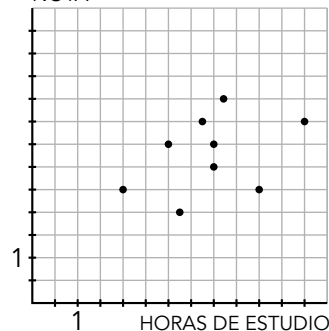
4. Hay una clara correlación entre el IDH y los indicadores sociales estudiados.

5. Experiencia práctica.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

1. a) NOTA



b) 0,44

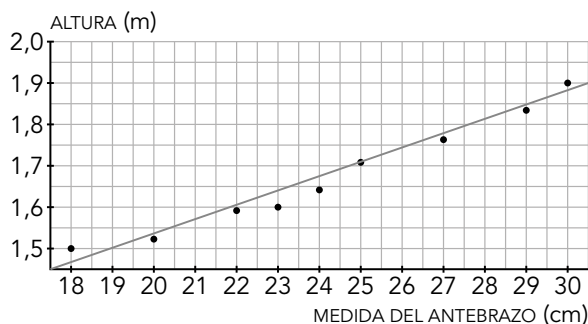
2. a) Se debe trazar una recta que se ajuste al conjunto de puntos.

b) Respuesta que dependerá de la recta trazada en el apartado anterior.

c) No serán fiables. 3 y sobre todo 15 son valores que no están en el intervalo de datos disponibles.

APLICA

1. y 2.



3. 0,99

4. a) $\hat{y}(12) = 1,276$ m

b) $\hat{y}(25,5) = 1,7215$ m

c) $\hat{y}(40) = 2,2$ m

5. La de 25,5 m es muy fiable. las de 12 cm y 40 cm son menos fiables porque son datos alejados de los disponibles.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

EXPERIENCIAS ALEATORIAS

- **Experiencias aleatorias** son aquellas cuyo resultado depende Cada uno de los resultados posibles se llama
- Las experiencias aleatorias son con **probabilidades previsibles** o con **probabilidades imprevisibles**.

PROBABILIDAD DE LOS SUCESOS

- Si la experiencia es irregular, experimentamos repetidamente (lanzar muchas veces) y asignamos como medida aproximada de $P[S]$ a la frecuencia relativa de S (**Ley de los grandes números**):

$$f_r(S) = \frac{\text{n.º de veces que ha ocurrido } S}{\text{n.º de veces que se ha hecho la experiencia}} = \frac{f(S)}{N}$$

- Si la experiencia es regular, la suma de las probabilidades de los sucesos elementales es

Para cualquier suceso S , $P[S] = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$ (**Ley de Laplace**)

EXPERIENCIAS COMPUESTAS

El cálculo de probabilidades en una experiencia compuesta se simplifica si se descompone en experiencias simples. Estas pueden ser independientes o dependientes.

Experiencias independientes. Dos experiencias son **independientes** cuando

En este caso, $P[S_1 \text{ en la 1.ª y } S_2 \text{ en la 2.ª}] = \dots\dots\dots$

Experiencias dependientes. Dos experiencias son **dependientes** cuando

En este caso, $P[S_1 \text{ en la 1.ª y } S_2 \text{ en la 2.ª}] = \dots\dots\dots$

EJEMPLOS:

- Las experiencias "lanzar un dado" y "lanzar una moneda" son
Por tanto, $P[3 \text{ en el dado y CARA en la moneda}] = \dots\dots\dots$
- Si tenemos una bolsa con 3 bolas blancas y 2 negras y realizamos dos extracciones, las experiencias "color de la 1.ª bola" y "color de la 2.ª bola" son
Por tanto, $P[\text{BLANCA la 1.ª y BLANCA la 2.ª}] = \dots\dots\dots$

PRACTICA

1. En los siguientes sucesos, di cuáles corresponden a experiencias aleatorias regulares y cuáles corresponden a experiencias irregulares. Calcula las probabilidades directamente en el primer caso, o asígnalas según la experimentación, en el segundo.

a) "Sacar un 3 al lanzar un dado".

b) "Sacar un 3 al lanzar un dado trucado".

(Resultados de la experimentación después de 100 lanzamientos):

CARA	1	2	3	4	5	6
FRECUENCIA	45	34	12	3	2	4

c) "Obtener un rey al sacar una carta de una baraja española".

d) Nevar en febrero el próximo año, en una determinada localidad".

(En 20 de los últimos 100 años nevó en febrero, en dicha localidad).

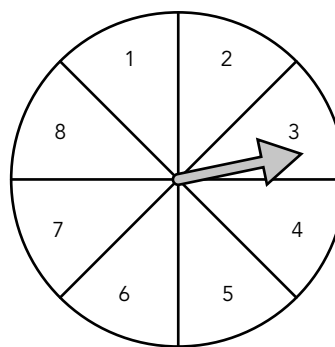
2. Observa la siguiente ruleta, con los posibles resultados al girar la flecha.

a) Escribe el espacio muestral E de la experiencia "girar la flecha".

b) Escribe los elementos de los sucesos compuestos:
 A (par mayor que 4), B (par menor que 6), C (número primo), I (impar menor que 5).

c) ¿Cómo son entre sí los sucesos A y B ? ¿Y B y C ?

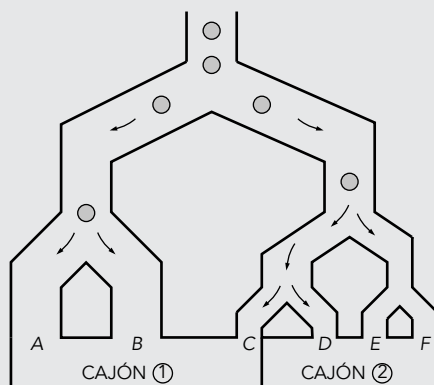
d) Escribe los elementos de $A \cup B$, $B \cup C$ y $C \cap I$.



3. Calcula las probabilidades de los sucesos A , B , C , $A \cup B$, $B \cup C$ y $C \cap I$ del ejercicio anterior.

APLICA. BOLAS CAPRICHOSAS

En tu instituto se celebra la Semana Matemática. Un alumno de Bachillerato presenta un artilugio como el que ves más abajo. Os propone el siguiente juego: "Podéis echar una bola por la entrada superior de mi máquina. Cada bola que echéis os costará 1 €. Si la bola cae en el cajón 1, perdéis vuestro dinero. Si la bola cae en el cajón 2, os doy 2 €. Yo creo que es un juego justo: de 6 posibles salidas, 3 están a mi favor y 3 al vuestro. ¿Jugáis, o qué?"



1. El juego parece equitativo, pero como estás estudiando probabilidad en clase, hay algo que te ronda por la cabeza y decides hacer unas cuantas cuentas. Lo primero que intentas es calcular las probabilidades de que la bola salga por A, B, C, D, E o F.
2. Con esos datos, ¿cuál es la probabilidad de ganar?
3. ¿Cuál es, por tanto, la probabilidad de perder?
4. Se te ocurre pensar que si lanzaras 1 000 bolas, en el cajón 1 caerían...

PRACTICA

1. Lanzamos dos dados, uno rojo y otro verde.

a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

b) Escribe todos los elementos de los sucesos:

$A = \{\text{el dado rojo obtiene 1}\}$

$B = \{\text{el dado verde obtiene 2}\}$

$C = \{\text{la suma de puntuaciones es 8}\}$

c) Describe el suceso $A \cap B$.

d) Dos de los sucesos anteriores son incompatibles. ¿Cuáles son?

2. Lanzamos una moneda 3 veces.

a) Completa la tabla de posibles resultados.

LANZAMIENTO 1.º	LANZAMIENTO 2.º	LANZAMIENTO 3.º	RESULTADOS
C	C	C	C C C
		+	
	+	C	
		+	
+	C		
	+		

b) ¿Son experiencias independientes? Justifica la respuesta.

c) Calcula la probabilidad de obtener solo dos caras.

3. Extraemos, sucesivamente, tres cartas de una baraja, pero no devolvemos la carta al mazo después de cada extracción.

a) ¿Son experiencias independientes? Justifica la respuesta.

b) Calcula la probabilidad de obtener tres ases.

APLICA. JUEGO CON MONEDAS

En una reunión de amigos en tu casa, uno de los amigos de tus padres propone el siguiente juego: "Para jugar hay que apostar 1 €. Yo lanzaré una moneda 4 veces. Si sale cara 2 o 3 veces, me quedo con el euro. Si sale cara 0, 1 o 4 veces, le doy al apostante el euro más un 20%". Todos los reunidos están entusiasmados. Sin embargo, tú tienes la mosca detrás de la oreja y decides hablar con tu madre.

1. Antes de contarle tus sospechas, decides calcular cuántos resultados posibles se pueden dar si se lanza una moneda 4 veces. ¿Cuáles son?
2. Luego te pones a calcular de cuántas formas sale cara 0, 1, 2, 3 y 4 veces.
3. Cuando empiezas a contarle a tu madre los resultados, esta te pregunta: "¿Cuál es la probabilidad que tiene un jugador de perder? ¿Y de ganar?" Contéstale.
4. Por sugerencia de tu madre, calculas lo que se espera que ocurra si apuestas 1 €, 100 € o 1 000 €. Para ello tienes que analizar la función $E(x) = 1,20x \cdot \frac{3}{8} - x \cdot \frac{5}{8}$, siendo x el dinero que se apuesta.

Unidad 13

Ficha de trabajo A

PRACTICA

- Regular. $P = \frac{1}{6}$
 - Irregular. $P = \frac{12}{100}$
 - Regular. $P = \frac{4}{40}$
 - Irregular. $P = 20\%$
- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
 - $A = \{6, 8\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$, $I = \{1, 3\}$
 - A y B son incompatibles. B y C son compatibles.
 - $A \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$; $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 7\}$
 $C \cap I = \{3\}$
- $P[A] = \frac{2}{8}$; $P[B] = \frac{2}{8}$; $P[A \cup B] = \frac{4}{8}$;
 $P[B \cup C] = \frac{5}{8}$; $P[C \cap I] = \frac{1}{8}$

APLICA

- $P[A] = P[B] = \frac{1}{4}$
 $P[C] = P[D] = P[E] = P[F] = \frac{1}{8}$
- $P[D \text{ o } E \text{ o } F] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- La probabilidad de perder es $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.
- En el cajón 1 caerán $\frac{5}{8}$ de $1000 = 625$ bolas.

Ficha de trabajo B

PRACTICA

- 36 elementos
 - $A = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6)\}$
 $B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), \dots, (6, 2)\}$
 $C = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$
 - $A \cap B = \{(1, 2)\}$
 - A y C

LANZAMIENTO 1.º	LANZAMIENTO 2.º	LANZAMIENTO 3.º	RESULTADOS
C	C	C	(CCC)
		+	(CC+)
	+	C	(C+C)
		+	(C++)
+	C	C	(+CC)
		+	(+C+)
	+	C	(++C)
		+	(+++)

- Son experiencias independientes, porque la probabilidad de que salga cara o cruz en un lanzamiento no depende del resultado anterior.
 - $P[\text{dos caras}] = \frac{3}{8}$
- No son independientes, porque no hay reemplazamiento.
 - $P[AAA] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2470}$

APLICA

- $(c, c, c, c); (c, c, c, +); (c, c, +, c); (c, c, +, +);$
 $(c, +, c, c); (c, +, c, +); (c, +, +, c); (c, +, +, +);$
 $(+, c, c, c); (+, c, c, +); (+, c, +, c); (+, c, +, +);$
 $(+, +, c, c); (+, +, c, +); (+, +, +, c); (+, +, +, +)$
- 0 caras: 1 caso; 1 cara: 4 casos; 2 caras: 6 casos
3 caras: 4 casos; 4 caras: 1 caso
- $P[\text{ganar}] = P[0 \text{ o } 1 \text{ o } 4] = \frac{3}{8}$
 $P[\text{perder}] = P[2 \text{ o } 3] = \frac{5}{8}$
- $E(1) = -0,175$; $E(100) = -17,5$
 $E(1000) = -175$
 Cuanto más se apuesta, más se pierde.